Entregar no FENIX antes das 24h00 de Domingo, 28 de Maio. As duas primeiras páginas deverão ser este enunciado com as respostas, que são seguidas pelas páginas com a justificação das respostas claramente escritas. Deverá ser entregue como um único ficheiro em formato pdf com o número de aluno indicado no nome do ficheiro. Só o último ficheiro submetido será avaliado.
Rascunhos não serão avaliados.

P1.1 Um electrão que se encontra inicialmente parado é acelerado num campo eléctrico antes de entrar numa região em que o campo eléctrico é nulo. A diferença de potencial na região em que o electrão é acelerado é U.

a) Qual é o comprimento de onda associado ao electrão para o caso $U = 100$ V. (2 pontos)

Resposta: 1.226×10^{-10} m

b) Qual é o comprimento de onda associado ao electrão para o caso $U = 100 \times 10^3$ V. (3 pontos)

Resposta: $3{,}70 \times 10^{-12}$ m

P1.2 A densidade de energia de radiação do corpo negro por unidade de frequência a uma temperatura T é

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_\mathrm{B}T \frac{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}}{e^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}} - 1}.$$

Esta expressão foi derivada em detalhe nas práticas. Muitas vezes encontramos a expressão para a densidade de energia de radiação do corpo negro por unidade de comprimento de onda $w(\lambda, T)$. A energia emitida por unidade de superfície é

$$E(\lambda, T) = \frac{c}{4} w(\lambda, T),$$

onde c, a velocidade da luz, é a velocidade a que a energia se propaga, e o factor $\frac{1}{4}$ é geométrico.

a) Partindo de $u(\nu, T)d\nu = -w(\lambda, T)d\lambda$ encontre a expressão para $w(\lambda, T)$. (2 pontos)

Resposta: $\frac{c}{\lambda^2} u(\nu, T)$

b) Para qual comprimento de onda, $\lambda_{\max}$, temos um máximo de $w(\lambda, T)$, conhecido como lei de Wien. (2 pontos)

Resposta: $\frac{0.00287755}{T}$

c) Calcule a potência por unidade de superfície emitida por um corpo negro,

$$I(T) = \int_0^\infty E(\lambda, T) d\lambda.$$

Use *matlab* ou *mathematica* para calcular o integral numérico. Vai obter a constante de Stefan-Boltzmann. (3 pontos)

Resposta: $5.6704 \times 10^{-8} \cdot T^4$

d) Obtenha o comportamento limite de $u(\nu, T)$ para grandes valores de ν. (1 ponto)

Resposta: $\lim_{\nu \to \infty} u(\nu, T) = 0$

e) Obtenha o comportamento limite de $u(\nu, T)$ para pequenos valores de ν. (1 ponto)

Resposta: $\lim_{\nu \to 0} u(\nu, T) = 0$

P1.3 Considere o Sol e a Terra como dois corpos negros com temperatura uniforme.

a) Derive uma expressão para a temperatura da Terra neste modelo em função de R_{Sol}, o raio do Sol, T_{Sol}, a temperatura da atmosfera solar e D,a distância da Terra ao Sol. (2 pontos)

Resposta: $\sqrt{\frac{R}{D}} \cdot T_{SOL}$

b) Procure os valores de T_{Sol}, R_{Sol} e D e obtenha uma estimativa para a temperatura média da Terra. (2 pontos)

Resposta: $278\,K = 4.98\,°C$

c) Enquanto a aproximação do corpo negro é relativamente boa para o Sol, não é muito boa para a Terra. Suponha que a Terra absorve a fracção $A(\lambda)$ da radiação incidente. Derive uma nova expressão para a temperatura média da Terra. (2 pontos)

Resposta: $\sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot T_{SOL}^4 \cdot A(\lambda)}{4 \cdot D^2}}$

P 1.1) m: massa do eletrão $(9.10938356 \times 10^{-31}\ kg)$

e: módulo da carga do eletrão $(1.602176634 \times 10^{-19}\ C)$

p: momento linear do eletrão $(kg \cdot m \cdot s^{-1})$

v: velocidade do eletrão $(m \cdot s^{-1})$

U: diferença de potencial local

E_c: energia cinética do eletrão

h: constante de Planck $(6.62607015 \times 10^{-34}\ J \cdot s)$

$$\begin{cases} p = m \cdot v \\ E_c = \frac{1}{2} m v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{p}{m} \\ E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ E_c = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2 m E_c}, \quad E_c = eU$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2 m e U}$$

equação de Broglie: $\lambda = \frac{h}{p}$

a) $U = 100\ V$

$$p = \sqrt{2 m e U} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9.10938356 \times 10^{-31} \cdot 1.602176634 \times 10^{-19} \cdot 100} =$$

$$= 5.402747725 \times 10^{-24}\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

$$p = m \cdot v \Leftrightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{5.402747725 \times 10^{-24}}{9.10938356 \times 10^{-31}} = 5.93 \times 10^{6}\ m\,s^{-1}$$

Como $v \ll c$, os efeitos relativistas podem ser desprezados

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.62607015 \times 10^{-34}}{5.402747725 \times 10^{-24}} = \boxed{1.226 \times 10^{-10}\ m}$$

b) $U = 100 \times 10^{3}\ V$

$$p = \sqrt{2 m e U} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9.10938356 \times 10^{-31} \cdot 1.60176634 \times 10^{-19} \cdot 100 \times 10^{3}} =$$

$$= 1.708498843 \times 10^{-22}\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

$$p = m \cdot v \Leftrightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{1.708498843 \times 10^{-22}}{9.10938356 \times 10^{-31}} = 1.88 \times 10^{8}\ m \cdot s^{-1}$$

$\frac{v}{c} \simeq \frac{1.88 \times 10^{8}}{3 \times 10^{8}} = 0.627$, o que já é um valor considerável, não podendo os efeitos relativísticos ser desprezados

$$E^2 = (mc^2 + E_c)^2 = (mc^2) + (pc)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{E_c}{mc^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow p = \sqrt{\left(1 + \frac{E_c}{mc^2}\right)^2 - 1} \cdot mc = \sqrt{\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)^2 - 1} \cdot m \cdot c =$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{(1.88 \times 10^{8})^2}{2 \cdot (299792456)^2}\right)^2 - 1} \cdot 9.10938356 \times 10^{-31} \cdot 299792458 =$$

$$= 1.79 \times 10^{-22}\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.62607015 \times 10^{-34}}{1.78880999 \times 10^{-22}} = \boxed{3.70 \times 10^{-12}\ m}$$

P 1.2)

a) $u(\nu, T)$: densidade de energia de radiação do corpo negro

ν: frequência da radiação (Hz)

T: temperatura do corpo negro (K)

c: velocidade da luz $(299792458\ m \cdot s^{-1})$

K_B: constante de Boltzmann $(1.3806503 \times 10^{-23}\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1})$

$$u(\nu, T)\, d\nu = u(\nu, T)\left(-\frac{c}{\lambda^2} d\lambda\right) =$$

$$= -w(\lambda, T)\, d\lambda$$

$$\Rightarrow w(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} u(\nu, T) \frac{d\lambda}{d\lambda} =$$

$$c = \lambda \nu$$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$= \boxed{\frac{c}{\lambda^2} u(\nu, T)} =$$

$$= \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h \cdot \nu}{K_B \cdot T}} - 1} =$$

$$= \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \frac{\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3}{e^{\frac{h \cdot \left(\frac{c}{\lambda}\right)}{K_B \cdot T}} - 1} =$$

$$= \boxed{\frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot K_B \cdot T}} - 1}}$$

b)

$$\frac{d\,w(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot K_B \cdot T}} - 1\right)}\right] = 0$$

$$= \frac{-40 \cdot \pi \cdot c \cdot h \cdot K_B \cdot T \cdot \lambda^4 \cdot e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}} + 8 \cdot \pi \cdot c^2 \cdot h^2 \cdot \lambda^3 \cdot e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}} + 40 \cdot \pi \cdot c \cdot h \cdot K_B \cdot T \cdot \lambda^4}{K_B \cdot T \cdot \left(\lambda^5 \cdot e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}} - \lambda^5\right)^{10}}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot T \cdot \lambda \cdot K_B \cdot \left(e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}} - 1\right) = c \cdot h \cdot e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{máx.} = \frac{c \cdot h}{5 \cdot T \cdot K_B} \cdot \frac{e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}}}{\underbrace{e^{\frac{c \cdot h}{K_B \cdot T \cdot \lambda}} - 1}_{\approx 1}} \approx \frac{c \cdot h}{5 \cdot T \cdot K_B}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{máx.} = \frac{299792458 \cdot 6.62607015 \times 10^{-34}}{5 \cdot 1.380649 \times 10^{-23} \cdot T} = \boxed{\frac{0.00287755}{T}\ m}$$

c) $I(T) = \int_0^\infty E(\lambda,T)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{c}{4} w(\lambda,T)\, d\lambda =$

$$= \int_0^\infty \frac{c}{4} \cdot \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot K_B \cdot T}} - 1}\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot K_B \cdot T}} - 1 \right)}\, d\lambda =$$

$\nu = \frac{c}{T}$

$z = \lambda T$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{z}{T}$

$\Leftrightarrow dz = T d\lambda$

$\Leftrightarrow d\lambda = \frac{1}{T} dz$

$$= 2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 \int_0^\infty \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z}{T}\right)^5 \left[e^{\frac{h \cdot c}{K_B \cdot z}} - 1 \right]}\, dz =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 \cdot T^4 \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{z^5 \left(e^{\frac{h \cdot c}{K_B \cdot z}} - 1 \right)}\, dz}_{\text{MATLAB (anexo)}} =$$

```
h = 6.62607015E-34;
kb = 1.380649E-23;
c = 299792458;

a = @(z) 1./(z.^5.*(exp((h*c)./(z.*kb))-1));

sol = integral(a, 0, Inf);

I = sol*(2*pi*h*c^2);
```

$$= 2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 \cdot 1.5154 \times 10^8 \cdot T^4 =$$

$$= \boxed{5.6704 \times 10^{-8} \cdot T^4} = \sigma \cdot T^4$$

σ: constante de Stefan-Boltzmann $(W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4})$

$\Rightarrow \sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\, W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$

d) $u(\nu,T) = \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h \cdot \nu}{K_B \cdot T}} - 1} = \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h}{K_B \cdot T} \cdot \nu} - 1}$

$$\lim_{\nu \to \infty} u(\nu,T) = \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\nu^3}{e^{\frac{h}{K_B \cdot T} \cdot \nu} - 1} \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\frac{\nu^3}{e^\nu}}{e^{\frac{h}{K_B \cdot T}} - \frac{1}{e^\nu}} \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \frac{\frac{0}{1}}{e^{\frac{h}{K_B \cdot T}} - 1} = 0$$

Para grandes valores de ν, $u(\nu,T)$ é muito pequeno

e) $\lim_{\nu \to 0} u(\nu,T) = \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \lim_{\nu \to 0} \left(\frac{\nu^3}{e^{\frac{h}{K_B \cdot T} \cdot \nu} - 1} \right) =$ regra de L'Hopital

$$= \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \lim_{\nu \to 0} \left(\frac{3\nu^2}{\frac{h}{K_B \cdot T} e^{\frac{h}{K_B \cdot T} \cdot \nu}} \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot \pi \cdot h}{c^3} \cdot \frac{0}{\frac{h}{K_B \cdot T}} = 0$$

Para pequenos valores de ν, $u(\nu,T)$ é muito pequeno

P 1.3)

L_{sol}: luminosidade do Sol

T: temperatura da Terra

P_{abs}: potência absorvida pela Terra

T_{sol}: temperatura do Sol

P_{rad}: potência irradiada pela Terra

a: albedo terrestre

r: raio da Terra (m)

R: raio do Sol (m)

D: distância entre a Terra e o Sol (m)

Assume-se que a área da Terra onde a radiação solar incide é um disco, e que apenas uma porção dessa energia é absorvida devido à presença de um albedo

$A_{SUP.\ TERRA} = \pi r^2$

$A_{ESFERA\ RAD.} = 4 \pi D^2$

$A_{SUP.\ TERRESTRE} = 4 \pi r^2$

$L_{SOL} = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{SOL}$

$$P_{abs} = L_{SOL} \cdot \frac{A_{SUP.\ TERRA}}{A_{ESFERA\ RAD}} \cdot (1-a) = L_{SOL} \frac{\pi r^2}{4 \pi D^2} (1-a) = L_{SOL} \cdot \frac{r^2}{4 D^2} \cdot (1-a)$$

$$P_{rad.} = A_{SUP.\ TERRESTRE} \cdot \sigma \cdot T^4 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sigma \cdot T^4$$

Para um corpo negro, $P_{abs.} = P_{rad.}$

$$\Rightarrow L_{SOL} \cdot \frac{r^2}{4 \cdot D^2} \cdot (1-a) = 4 \pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{L_{SOL} \cdot r^2 \cdot (1-a)}{4 \cdot D^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{L_{SOL} \cdot (1-a)}{16 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot D^2}}$$

a) Assumindo a Terra um corpo negro perfeito, não haverá um albedo

$a = 0$: $T = \sqrt[4]{\frac{L_{SOL}}{16 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot D^2}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{SOL}^4}{16 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot D^2}} =$

$$= \sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot T_{SOL}^4}{D^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{R}{D}} \cdot T_{SOL}}$$

b) $R \simeq 6.957 \times 10^8\, m$

$D \simeq 150 \times 10^9\, m$

$T_{SOL} \simeq 5500 + 273.15 = 5773.15\, K$

$$T = \sqrt{\frac{R}{D}} \cdot T_{SOL} = \sqrt{\frac{6.957 \times 10^8}{150 \times 10^9}} \cdot 5773.15 = \boxed{278\, K = 4.85 °C}$$

c) $A(\lambda) = 1 - a$

$$T = \sqrt[4]{\frac{L_{SOL} \cdot (1-a)}{16 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot D^2}} = \sqrt[4]{\frac{L_{SOL} \cdot A(\lambda)}{16 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot D^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{SOL}^4 \cdot A(\lambda)}{16 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot D^2}} =$$

$$= \boxed{\sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot T_{SOL}^4 \cdot A(\lambda)}{4 \cdot D^2}}}$$