Entregar no FENIX antes das 23h59 de Quarta-feira, 7 de Junho. As duas primeiras páginas deverão ser este enunciado com as respostas, que são seguidas pelas páginas com a justificação das respostas claramente escritas. Deverá ser entregue como um único ficheiro em formato pdf com o número de aluno indicado no nome do ficheiro. Só o último ficheiro submetido será avaliado.
Rascunhos não serão avaliados.

P2.1 No princípio do século XX foram observadas umas linhas no espectro óptico de um átomo. Na tabela encontra 10 valores dos inversos dos comprimentos de onda que foram medidos.

Line	1	2	3	4	5
$1/\lambda$ (cm^{-1})	82258.27	97491.28	102822.84	105290.58	15232.97
Line	6	7	8	9	10
$1/\lambda$ (cm^{-1})	20564.57	23032.31	5331.52	7799.30	2469

a) Encontre tantos casos quantos possíveis em que um dos inversos é a diferença de dois outros (dentro da precisão dos valores experimentais). (5 pontos)

Resposta:

2-1=5 3-1=8 6-5=8 9-8=10
3-1=6 4-2=9 7-5=9
4-1=7 4-3=10 7-6=10

b) Mostre que todas as linhas podem ser explicadas por apenas 5 níveis de energia. Encontre essas energias (a menos de uma constante aditiva) indique os valores em eV e desenhe um diagrama que explica as observações. (5 pontos)

Resposta (energias em eV):

$E_1 = K$ $E_2 = K + 10.1987$ $E_3 = K + 12.0874$ $E_4 = K + 12.7484$ $E_5 = K + 13.0545$ (eV)

c) Consegue identificar o átomo sabendo que tem apenas um electrão? (3 pontos)

Resposta: hidrogénio (H_1)

P2.2 As forças entre os protões e neutrões nos núcleos atómicos não têm uma forma simples como a força de Coulomb ou gravitacional. No entanto usando a informação que o tamanho dos núcleos é da ordem dos 10^{-15} m pode-se ter uma ideia da ordem de grandeza das energias nucleares.

a) Encontre essa ordem de grandeza. (5 pontos)

Resposta: 10^7 (eV)

b) Procure um valor da energia de uma partícula emitida por uma desintegração radioactiva (na net...) e compare com o valor estimado na alínea anterior. (2 pontos)

Resposta: urânio-238 $\rightarrow$ 10^6 (eV)

$\frac{10^6}{10^7} \simeq 0.10 = 10\%$ energia nuclear

P2.1)

a) Foi escrito um código em MATLAB que procura a existência de pares de valores tabelados cuja diferença iguale um outro valor. No total, foram obtidos 20 resultados.

```
lambda = [82258.27, 97491.28, 102822.84, 105290.58, 15232.97, 20564.57, 23032.31, 5331.52, 7799.30, 2469];

count = 0;
error = 0.001;

for i=1:length(lambda)-1
    for j=i+1:length(lambda)
        dif = abs(lambda(i) - lambda(j));
        for k=1:length(lambda)
            if (abs(lambda(k) - dif) < error*dif)
                count = count + 1;
                list(count, 1) = lambda(i);
                list(count, 2) = lambda(j);
                list(count, 3) = lambda(k);
                list(count, 4) = dif;
            end
        end
    end
end
```

$a - b = c \quad \tilde{c}$

	1	2	3	4
1	8.2258e+04	9.7491e+04	1.5233e+04	1.5233e+04
2	8.2258e+04	1.0282e+05	2.0565e+04	2.0565e+04
3	8.2258e+04	1.0529e+05	2.3032e+04	2.3032e+04
4	9.7491e+04	1.0282e+05	5.3315e+03	5.3316e+03
5	9.7491e+04	1.0529e+05	7.7993e+03	7.7993e+03
6	9.7491e+04	1.5233e+04	8.2258e+04	8.2258e+04
7	1.0282e+05	1.0529e+05	2469	2.4677e+03
8	1.0282e+05	2.0565e+04	8.2258e+04	8.2258e+04
9	1.0282e+05	5.3315e+03	9.7491e+04	9.7491e+04
10	1.0529e+05	2.3032e+04	8.2258e+04	8.2258e+04
11	1.0529e+05	7.7993e+03	9.7491e+04	9.7491e+04
12	1.0529e+05	2469	1.0282e+05	1.0282e+05
13	1.5233e+04	2.0565e+04	5.3315e+03	5.3316e+03
14	1.5233e+04	2.3032e+04	7.7993e+03	7.7993e+03
15	2.0565e+04	2.3032e+04	2469	2.4677e+03
16	2.0565e+04	5.3315e+03	1.5233e+04	1.5233e+04
17	2.3032e+04	7.7993e+03	1.5233e+04	1.5233e+04
18	2.3032e+04	2469	2.0565e+04	2.0563e+04
19	5.3315e+03	7.7993e+03	2469	2.4678e+03
20	7.7993e+03	2469	5.3315e+03	5.3303e+03

$\tilde{c} \rightarrow$ valor real não tabelado

list ⤴

É de notar que estamos perante um sistema do tipo:

$a - b = c$

que pode também ter soluções do tipo

$a - c = b$

Ou seja, o número de combinações independentes será metade do devolvido pelo código acima.

Para garantir que isto era verdade, foi escrito um código que elimina combinações repetidas, obtendo o resultado previsto de 10 pares de combinações.

```
list_2 = list;

for i = 1:length(list_2)
    current_line = list_2(i, 1:3);
    for j = i+1:length(list_2)
        compare_line = list_2(j, 1:3);
        if isequal(sort(current_line), sort(compare_line))
            list_2(j, :) = 0;
        end
    end
end

ii = 1;

for i=1:length(list_2)
    if list_2(i, 1) ~= 0
        list_3(ii, :) = list_2(i, :);
        ii = ii + 1 ;
    end
end

for i=1:length(list_3)
    list_4(i, :) = sort(list_3(i, [1,2,3]), 'descend');
end
```

$a - b = c$

	1	2	3
1	9.7491e+04	8.2258e+04	1.5233e+04
2	1.0282e+05	8.2258e+04	2.0565e+04
3	1.0529e+05	8.2258e+04	2.3032e+04
4	1.0282e+05	9.7491e+04	5.3315e+03
5	1.0529e+05	9.7491e+04	7.7993e+03
6	1.0529e+05	1.0282e+05	2469
7	2.0565e+04	1.5233e+04	5.3315e+03
8	2.3032e+04	1.5233e+04	7.7993e+03
9	2.3032e+04	2.0565e+04	2469
10	7.7993e+03	5.3315e+03	2469

(sem repetições) list_4

b) Sabendo que um eletrão pode ser excitado através da absorção da energia proveniente de um fotão, e que o mesmo tipo de energia pode ser emitido quando há uma desexcitação do eletrão do átomo, podemos aplicar um modelo matemático que descreve este fenómeno para prever os níveis de energia deste átomo e tentar identificá-lo.

$$E = pc = \frac{hc}{\lambda}\ [J] \propto \lambda^{-1}$$

Havendo no total 10 combinações de números cuja diferença iguala um outro valor tabelado, podemos dividi-las em saltos energéticos distintos do tipo 1-2-3-4, representando o número de saltos energéticos consecutivos possíveis para descer de níveis superiores ao mais baixo ($1+2+3+4=10$).

Para encontrar os 4 saltos elementares, que representam os inversos do comprimento de onda necessários para colocar um eletrão num nível de energia adjacente, escreveu-se um código que minimiza a diferença entre o maior inverso de comprimento de onda com todas as combinações de 4 valores do inverso dos comprimentos de onda tabelados. Apenas uma combinação devolveu um valor de diferença razoável, significando que encontramos então os 4 valores desejados. As restantes diferenças têm ordem igual ou superior a 10^3.

```
max = maxk(lambda, 1);
lowest = 9999;
iii = 1;

for i=1:length(lambda)-3
    for j=i+1:length(lambda)-3
        for k=j+1:length(lambda)-1
            for a=k+1:length(lambda)
                sum = lambda(i) + lambda(j) + lambda(k) + lambda(a);
                lowest_nums(iii) = abs(sum - max);
                iii = iii + 1;
                if abs(sum - max) < lowest
                    lowest = sum - max;
                    vecs = [lambda(i), lambda(j), lambda(k), lambda(a)];
                end
            end
        end
    end
end

lowest_nums = sort(lowest_nums);
```

	1	2	3	4
1	8.2258e+04	1.5233e+04	5.3315e+03	2469

vecs (inversos de comprimentos de onda elementares)

lowest_nums ⤵ $1.18 \ll 2.469 \times 10^3$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1.1800	2.4690e+03	5.3315e+03	5.3328e+03	7.8005e+03	7.8006e+03	1.0268e+04	1.0663e+04	1.3131e+04	1.5234e+04	1.5234e+04	1.7702e+04	1.7702e+04

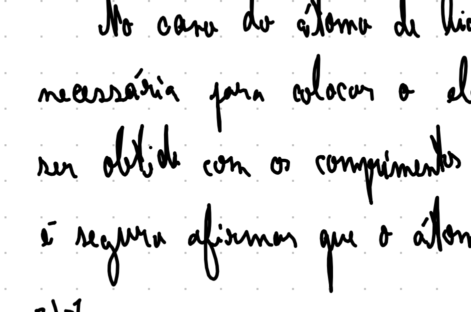
```
lamb_jump(1) = vecs(1);
lamb_jump(2) = vecs(1) + vecs(2);
lamb_jump(3) = vecs(1) + vecs(2) + vecs(3);
lamb_jump(4) = vecs(1) + vecs(2) + vecs(3) + vecs(4);

energy = lamb_jump * 10^2 * c * h * eV;
```

energy (energias dos saltos elementares) ⤵

	1	2	3	4
1	a 10.1987	b 12.0874	c 12.7484	d 13.0545

```
c = 299792458;
h = 6.6260715E-34;
eV = 6.241509E18;
```

constantes



$E_1 = K \quad E_3 = K + 12.0874 \quad E_5 = K + 13.0545$

$E_2 = K + 10.1987 \quad E_4 = K + 12.7484 \quad (eV)$

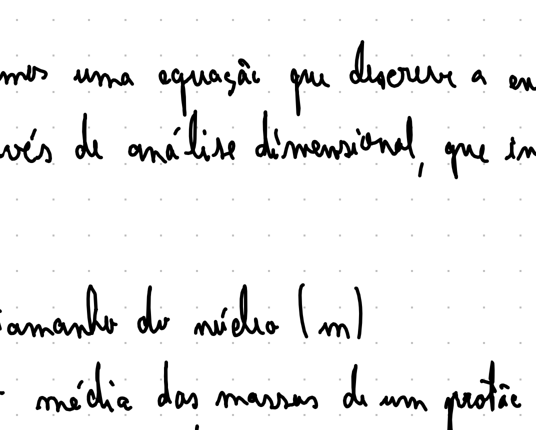
c) Podemos comparar o valor dos comprimentos de onda obtidos com os tabelados para cada elemento da tabela periódica e averiguar se sobrepõe algum.

No caso do átomo de hidrogénio, podemos verificar que a energia necessária para colocar o eletrão de valência em estados excitados pode ser obtida com os comprimentos de onda obtidos na alínea anterior. Logo, é seguro afirmar que o átomo que foi alvo de estudo foi o hidrogénio.

$(122 \times 10^{-7})^{-1} = 81967\ cm^{-1}$

$(656 \times 10^{-7})^{-1} = 15244\ cm^{-1}$

$(1875 \times 10^{-7})^{-1} = 5333\ cm^{-1}$



Estes valores são muito próximos dos que constituem o vetor vecs da alínea b).

https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrogen_spectral_series#/media/File:Hydrogen_transitions.svg

P2.2)

a) Procuramos uma equação que descreve a energia nuclear de um dado átomo, através de análise dimensional, que inclua as seguintes variáveis:

- d - tamanho do núcleo (m)
- m_{pN} - média das massas de um protão e um eletrão
- $\hbar$ - constante de Planck reduzida ($\frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34}\ J \cdot s$)

A energia de um átomo pode ser relacionada com a sua massa com:

$$E = m \cdot c^2 \Rightarrow E = [kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}] = [J]$$

Por análise dimensional:

$$E = d^a \cdot m_{pN}^b \cdot \hbar^c$$

$$\Rightarrow [kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}] = [m]^a \cdot [kg]^b \cdot [J \cdot s]^c$$
$$= [m]^a \cdot [kg]^b \cdot [kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}]^c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = b + c \\ 2 = a + 2c \\ -2 = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Logo,

$$E = d^{-2} \cdot m_{pN}^{-1} \cdot \hbar^2, \quad \begin{cases} d = 10^{-15}\ m \\ m_{pN} = (1.673 \times 10^{-27} + 1.675 \times 10^{-27})/2 \\ \hbar = 1.054572 \times 10^{-34}\ J \cdot s \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 10^{-15}\ m \\ m_{pN} = 1.674 \times 10^{-27}\ kg \\ \hbar = 1.054572 \times 10^{-34}\ J \end{cases}$$

$$E = (10^{-15})^{-2} \cdot (1.674 \times 10^{-27})^{-1} \cdot (1.054572 \times 10^{-34})^2 = 6.6435 \times 10^{-12}\ J$$

$$1\ eV = 1.602176 \times 10^{-19}\ J \Rightarrow E = 4.147 \boxed{\times 10^7}\ eV = 41.47\ MeV$$

b) É importante ter em conta que a energia emitida no decaimento radioativo de um átomo varia consoante o número atómico e isótopos dadas as diversas características que cada elemento pode apresentar.

O isótopo urânio-238 emite uma partícula α durante um processo de decaimento radioativo. Estas partículas, quando emitidas, têm um valor de aproximadamente 4.2 MeV.

Por comparação de ordens de grandeza, concluímos que este decaimento corresponde a aproximadamente $\frac{10^6}{10^7} = 0.10 = \boxed{10\%}$ da energia nuclear do isótopo, se assumirmos que o seu núcleo tem um tamanho que ronda os 10^{-15} m de grandeza.