



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
LICENCIATURA EM ENGENHARIA AEROESPACIAL  
LABORATÓRIO DE MECÂNICA APLICADA I

---

## Esforços numa Treliça

---

*Alunos:*

Leonor Alves - 102845  
Lourenço Faria - 103354  
Paulo Campos - 103042  
Pedro Almeida - 103027

*Professor responsável:*

Prof. Pedro Serrão

**Resumo:**

Este relatório foi desenvolvido no âmbito da cadeira Mecânica Aplicada I. O grupo de alunos aqui nomeado efetuou o trabalho laboratorial e registou os valores necessários à escrita deste relatório no dia 12/04/2022, às 15:30h, no Laboratório de Mecânica Aplicada.

Ano Letivo 2021/2022



---

# Índice

<b>Índice</b>	<b>i</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>i</b>
<b>Índice de tabelas</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução Teórica</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	1
<b>2 Resultados experimentais</b>	<b>2</b>
2.1 Identificação das barras . . . . .	2
2.2 Dados obtidos . . . . .	2
<b>3 Resultados Teóricos</b>	<b>4</b>
3.1 Identificação dos elementos com cargas nulas . . . . .	4
3.2 Cálculo das cargas teóricas utilizando o método dos nós . . . . .	5
<b>4 Comparação entre resultados</b>	<b>11</b>
<b>5 Conclusões</b>	<b>12</b>

## Índice de figuras

1	Compressão vs Tração . . . . .	1
2	Exemplo de utilização de treliças na construção da ponte Adda Bridge. Foto de Eugenio Mergazona, setembro 2021. . . . .	1
3	Esquema da treliça utilizada na atividade laboratorial . . . . .	2
4	Treliça . . . . .	2
5	Representação esquemática das forças aplicadas no nó D . . . . .	4
6	Representação esquemática das forças aplicadas no nó F . . . . .	4
7	Representação esquemática das forças aplicadas no nó G . . . . .	5
8	Cargas aplicadas no nó A . . . . .	6
9	Cargas aplicadas no nó C com carga central . . . . .	7
10	Cargas aplicadas no nó E . . . . .	8
11	Cargas aplicadas no nó C com carga lateral . . . . .	8
12	Relação entre a carga aplicada na barra FH e a carga aplicada na estrutura . . . . .	11
13	Relação entre a carga aplicada na barra CH e a carga aplicada na estrutura . . . . .	12

---

## Índice de tabelas

1	Resultados experimentais da aplicação da carga central . . . . .	3
2	Resultados experimentais da aplicação da carga central e lateral . . . . .	3
3	Resultados teóricos da aplicação da carga central . . . . .	10
4	Resultados experimentais da aplicação da carga lateral . . . . .	10
5	Resultados experimentais da aplicação da carga central e lateral . . . . .	10
6	Comparação entre os resultados experimentais e teóricos dos esforços na barra FH	11
7	Comparação entre os resultados experimentais e teóricos dos esforços na barra CH	11

---

# 1 Introdução Teórica

As treliças (estruturas articuladas) correspondem a conjuntos de barras rígidas e delgadas, ligadas entre si através de nós, onde estão aplicadas forças. De facto, as barras apenas podem suportar esforços axiais (forças longitudinais) sejam estes à tração ou à compressão (Figura 1). As treliças são utilizadas em inúmeras construções desde pontes a telhados (Figura 2).



Figura 1: Compressão vs Tração



Figura 2: Exemplo de utilização de treliças na construção da ponte Adda Bridge. Foto de Eugenio Mergazona, setembro 2021.

Neste relatório foi utilizado o método dos nós como forma de estudar e prever teoricamente o esforço exercido por cada uma das barras nos nós. Este método assenta no princípio de que a estrutura se encontra em equilíbrio estático, permitindo-nos calcular as forças dos apoios através de balanços de forças e momentos. De seguida, os nós são estudados de forma recursiva, aplicando sucessivamente as leis do equilíbrio estático. Deste modo, torna-se possível calcular não só o esforço aplicado por cada barra, mas também compreender se estas estão à tração ou à compressão.

Além deste método, certas deduções teóricas permitem identificar de forma imediata barras que exerçam esforço nulo. Ou seja, é possível verificar que, caso as forças que atuam em determinado nó forem colineares (estiverem na mesma linha de ação) duas a duas (até quatro), então terão de ter igual módulo e sentidos opostos, de forma a preservar o equilíbrio. Assim, ao considerar três membros que atuam no mesmo nó, estando dois na mesma linha de ação (não colineares com o terceiro membro), torna-se evidente que o esforço do terceiro terá de ser nulo, uma vez que não existe uma força que o anule, de forma a manter o equilíbrio.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho laboratorial tem como objetivo estudar e compreender de que forma a ação de forças exteriores influencia o esforço realizado por cada elemento da treliça. Para isso será necessário comparar os resultados previstos teoricamente, através dos métodos já referidos, com os obtidos experimentalmente.

Na figura apresentada (Figura 3) é possível observar um esquema da treliça usada na atividade laboratorial, bem como as células de carga utilizadas para simular as forças exteriores: o primeiro carregamento (verde) consiste na aplicação de uma força central, na vertical, de cima para baixo; o segundo carregamento (vermelho) consiste na adição de uma força lateral que forma um ângulo de  $30^\circ$  (em relação à horizontal), à força central do primeiro carregamento.



F1 [N]	Esforços nas barras [N]													
	AF	FH	GH	AB	BC	CD	DE	EG	BF	CF	CH	CG	DG	
-0.1	0.6	0.6	1.2	1.7	-3.5	1.2	0.6	1.2	-1.2	1.2	0.6	0.0	0.0	
100.1	-102.6	-106.1	-101.5	91.6	82.3	89.9	90.5	-106.7	1.7	2.3	104.4	2.3	0.6	
200.7	-223.8	-231.9	-226.1	197.7	191.9	196.0	197.1	-234.8	2.9	2.3	228.5	0.6	-0.6	
300.6	-323.6	-334.0	-327.0	285.9	281.2	285.3	283.5	-338.0	2.9	3.5	327.0	2.9	0.6	
399.9	-428.5	-440.7	-431.4	374.0	377.5	376.3	372.3	-445.9	4.1	3.5	430.2	1.7	1.7	
500.4	-545.1	-560.1	-548.5	475.5	479.0	477.8	472.0	-563.6	4.1	5.2	547.4	2.3	1.7	

Tabela 1: Resultados experimentais da aplicação da carga central

Carga aplicada		Esforços nas barras [N]												
F1 [N]	F2 [N]	AF	FH	GH	AB	BC	CD	DE	EG	BF	CF	CH	CG	DG
100.5	204.1	-8.1	-4.6	-6.4	191.9	180.9	22.0	14.5	-13.9	-0.6	0.6	2.9	204.1	4.1

Tabela 2: Resultados experimentais da aplicação da carga central e lateral

---

### 3 Resultados Teóricos

#### 3.1 Identificação dos elementos com cargas nulas

Com base no método descrito na introdução teórica é possível determinar quais as barras que exercem esforço nulo na estrutura, de forma não só a facilitar os cálculos na próxima etapa, mas também a compreender melhor de que forma os esforços são realizados nos elementos da treliça.

##### Carregamento Central:

No nó D, onde se interseam as barras DC, DE e DG, dado que não existem forças externas aplicadas e que as barras DC e DE são colineares, tendo por base as leis de equilíbrio, torna-se evidente que as forças aplicadas pelas barras têm a mesma intensidade e sentidos opostos ( $\vec{F}_{DC} = -\vec{F}_{DE}$ ) e a barra DG efetua esforço nulo ( $F_{DG} = 0$ ) (Figura 5).

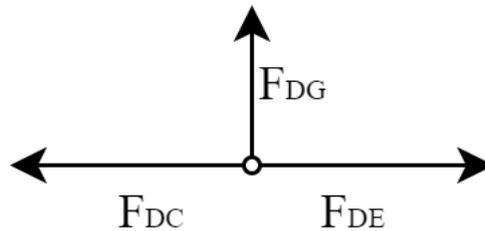


Figura 5: Representação esquemática das forças aplicadas no nó D

Dado a sua semelhança geométrica e mecânica, é possível efetuar o mesmo raciocínio para o nó B, onde se interseam as barras BA, BC e BF: uma vez que as barras BA e BC são colineares e não existem forças externas aplicadas no nó, temos que:  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{BC}$  e o esforço da barra BF é nulo ( $F_{BF} = 0$ ).

No nó F, onde se interseam as barras AF, HF, BF e CF, dado que, tal como visto anteriormente, o esforço exercido pela barra BF no nó é nulo, as barras AH e HF são colineares e não existem forças externas aplicadas no nó, torna-se evidente que  $\vec{F}_{AF} = -\vec{F}_{HF}$  e que o esforço da barra CF é nulo ( $F_{CF} = 0$ ) (Figura 6).

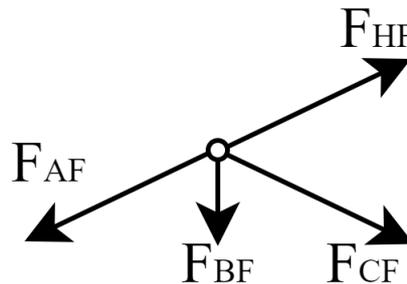


Figura 6: Representação esquemática das forças aplicadas no nó F

Finalmente, no nó G, interseado pelas barras HG, EG, CG e DG, sendo o esforço exercido por DG nulo, é possível afirmar que a barra CG efetua esforço zero ( $F_{CG} = 0$ ), dada a colinearidade das barras HG e EG (Figura 7).

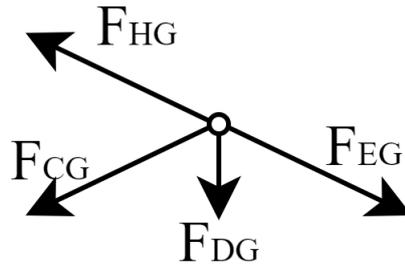


Figura 7: Representação esquemática das forças aplicadas no nó G

### Carregamento central + carregamento lateral:

Neste caso, além das reações dos apoios, existem duas forças exteriores, que terão efeitos nos esforços dos elementos da treliça. Na verdade, apenas as barras AB, BC e CG não exercem esforço nulo. Isto é, sumariamente, através do cálculo do momento (ver 3.2) conclui-se que a reação vertical no ponto E é nula, e conseqüentemente o esforço aplicado pela barra GE é zero. Assim, e recorrendo sucessivamente ao método utilizado no primeiro caso, facilmente chegamos à conclusão de que as barras DE, CD, HC, HG, HF, FC, FB e FA não efetuam esforço.

### 3.2 Cálculo das cargas teóricas utilizando o método dos nós

Consideremos as cargas positivas aplicadas nos membros da treliça forças à tração e as negativas forças à compressão.

#### 1º caso:

Nesta situação, apenas a carga central  $F_1$  é aplicada na treliça, variando de 100 em 100 N, até aos 500 N, tal como no guia laboratorial. A Tabela 3 indica os valores de todas as forças exercidas pelos membros da treliça.

$$F_2 = 0 \text{ N}$$

#### Reações nos apoios:

$$\sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0: A_y + E_y - F_1 = 0$$

Por simetria:

$$A_y = E_y = \frac{F_1}{2}$$

#### Barras nulas:

$$F_{BF} = F_{CF} = F_{CG} = F_{DG} = 0$$

---

Nó A:

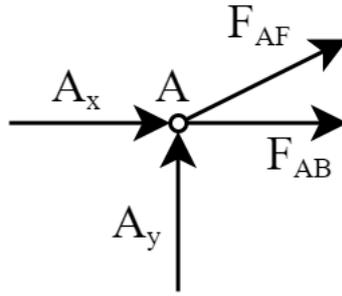


Figura 8: Cargas aplicadas no nó A

$$\sum F_y = 0: \frac{F_1}{2} + F_{AF} \cos 60 = 0 \Leftrightarrow F_{AF} = -\frac{F_1}{2 \cos 60} = -F_1$$

$$F_{AF} = -F_1$$

$$\sum F_x = 0: F_{AF} \sin 60 + F_{AB} = 0 \Leftrightarrow F_{AB} = -F_{AF} \sin 60$$

$$F_{AB} = F_1 \sin 60$$

Por simetria:

$$F_{EG} = F_{AF} = -F_1$$

$$F_{DE} = F_{AB} = F_1 \sin 60$$

Barras colineares:

$$F_{DE} = F_{CD} = F_1 \sin 60$$

$$F_{EG} = F_{GH} = -F_1$$

$$F_{AB} = F_{BC} = \sin 60 F_1$$

$$F_{AF} = F_{FH} = -F_1$$

---

Nó C:

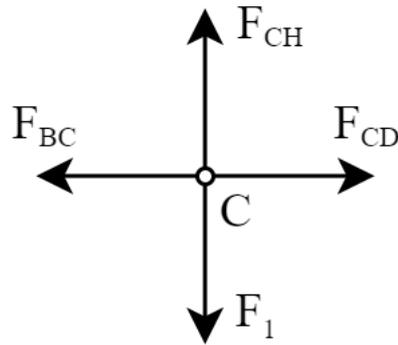


Figura 9: Cargas aplicadas no nó C com carga central

$$\sum F_y=0: F_{CH} - F_1 = 0 \Leftrightarrow F_{CH} = F_1$$

$$F_{CH} = F_1$$

**2º caso:**

Esta situação não foi realizada em laboratório. Apenas a carga lateral  $F_2$  é aplicada na treliça, com um valor fixo de 200 N. Na Tabela 5 encontram-se os valores das forças exercidas por cada membro da treliça.

$$F_1 = 0 \text{ N}$$

$$F_2 = 200 \text{ N}$$

**Reações nos apoios:**

$$\sum F_x=0: A_x + 200 \cos 30 \Leftrightarrow A_x = -200 \cos 30 \text{ (N)}$$

$$A_x = -200 \cos 30 \text{ (N)}$$

$$\sum M_A=0: 200 \sin 30 \times 2 + E_y \times 4 = 0 \Leftrightarrow E_y = -50 \text{ N}$$

$$E_y = -50 \text{ N}$$

$$\sum F_y=0: A_y + E_y + 200 \sin 30 = 0 \Leftrightarrow A_y = -50 \text{ N}$$

$$A_y = -50 \text{ N}$$

**Barras nulas:**

$$F_{BF} = F_{CF} = F_{DG} = 0$$

**Nó A:**

$$\sum F_y=0: F_{AF} \sin 30 + A_y = 0 \Leftrightarrow F_{AF} = 100 \text{ N}$$

$$F_{AF} = 100 \text{ N}$$

---


$$\sum F_x=0: A_x + F_{AB} + F_{AF} \cos 30 = 0 \Leftrightarrow F_{AB} = 86.6 \text{ N}$$

**Nó E:**

$$F_{AB} = 86.6 \text{ N}$$

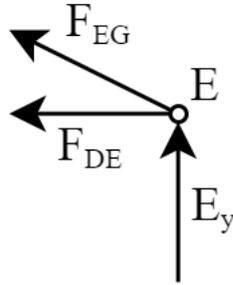


Figura 10: Cargas aplicadas no nó E

$$\sum F_y=0: F_{EG} \sin 30 + E_y = 0 \Leftrightarrow F_{EG} = 100 \text{ N}$$

$$F_{EG} = 100 \text{ N}$$

$$\sum F_x=0: F_{EG} \cos 30 + F_{DE} = 0 \Leftrightarrow F_{DE} = -86.6 \text{ N}$$

$$F_{DE} = -86.6 \text{ N}$$

**Por colinearidade:**

$$F_{FH} = F_{AF} = 100 \text{ N}$$

$$F_{BC} = F_{AB} = 86.6 \text{ N}$$

$$F_{CD} = F_{DE} = -86.6 \text{ N}$$

$$F_{GH} = F_{EG} = 100 \text{ N}$$

$$F_{CG} = F_2 = 200 \text{ N}$$

**Nó C:**

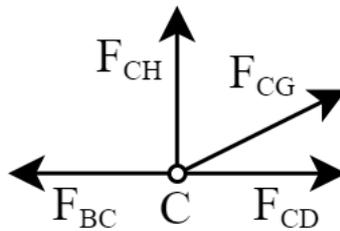


Figura 11: Cargas aplicadas no nó C com carga lateral

---

$$\sum F_y = 0: F_{CG} \sin 30 + F_{CH} = 0 \Leftrightarrow F_{CH} = -100 \text{ N}$$

$$F_{CH} = -100 \text{ N}$$

**3º caso:**

Nesta situação, ambas as cargas central  $F_1$  e lateral  $F_2$  são aplicadas na treliça, com valores de 100 N e 200 N, respectivamente.

$$F_1 = 100 \text{ N}$$

$$F_2 = 200 \text{ N}$$

**Reações nos apoios:**

$$\sum F_x = 0: A_x + 200 \cos 30 \Leftrightarrow A_x = -200 \cos 30 \text{ (N)}$$

$$A_x = -200 \cos 30 \text{ (N)}$$

$$\sum M_A = 0: E_y = 0$$

$$E_y = 0$$

$$\sum F_y = 0: A_y + E_y - 100 + 200 \sin 30 = 0 \Leftrightarrow A_y = 0$$

$$A_y = 0$$

**Barras nulas:**

$$F_{AF} = F_{DF} = F_{CF} = F_{FH} = F_{CH} = F_{GH} = F_{CD} = F_{DG} = F_{DE} = F_{EG} = 0$$

**Por colinearidade:**

$$F_{AB} = F_{BC} = A_x = 200 \cos 30 = 173.2 \text{ N}$$

$$F_{CG} = F_2 = 200 \text{ N}$$

CargaCentral[N]	Esforços nas barras [N]													
	AF	FH	GH	AB	BC	CD	DE	EG	BF	CF	CH	CG	DG	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
100.0	-100.0	-100.0	86.6	86.6	86.6	86.6	-100.0	0.0	0.0	100.0	0.0	0.0	0.0	
200.0	-200.0	-200.0	173.2	173.2	173.2	173.2	-200.0	0.0	0.0	200.0	0.0	0.0	0.0	
300.0	-300.0	-300.0	259.8	259.8	259.8	259.8	-300.0	0.0	0.0	300.0	0.0	0.0	0.0	
400.0	-400.0	-400.0	346.4	346.4	346.4	346.4	-400.0	0.0	0.0	400.0	0.0	0.0	0.0	
500.0	-500.0	-500.0	433.0	433.0	433.0	433.0	-500.0	0.0	0.0	500.0	0.0	0.0	0.0	

Tabela 3: Resultados teóricos da aplicação da carga central

Carga aplicada	Esforços nas barras [N]													
	Central F1 [N]	Lateral F2 [N]	AF	FH	GH	AB	BC	CD	DE	EG	BF	CF	CH	CG
100.0	200.0	100.0	100.0	100.0	86.6	86.6	-86.6	-86.6	100.0	0.0	0.0	-100.0	200.0	0.0

Tabela 4: Resultados experimentais da aplicação da carga lateral

Carga aplicada	Esforços nas barras [N]													
	Central F1 [N]	Lateral F2 [N]	AF	FH	GH	AB	BC	CD	DE	EG	BF	CF	CH	CG
100.0	200.0	0.0	0.0	0.0	173.2	173.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	200.0	0.0

Tabela 5: Resultados experimentais da aplicação da carga central e lateral

## 4 Comparação entre resultados

Para verificar a fiabilidade do método dos nós, utilizado para prever as forças exercidas pelos diversos membros da treliça, podemos comparar os resultados experimentais e teóricos obtidos no 1º caso. Para exemplificação, analisemos a força à compressão a que o membro FH está sujeito:

Esforços na barra FH					
Carga na Barra [N]		Erro		Declive	
Experimental	Teórico	Absoluto	Relativo [%]	Reta experimental	Reta teórica
-1.2	0.0	1.2	N.D.		
101.5	100.0	1.5	1.5		
226.1	200.0	26.1	13.1		
327.0	300.0	27.0	9.0	1.0966	1.0000
431.1	400.0	31.1	7.8		
548.5	500.0	48.5	9.7		

Tabela 6: Comparação entre os resultados experimentais e teóricos dos esforços na barra FH

$$|E_r(\%)| = \frac{|1.0000 - 1.0966|}{|1.0000|} \times 100 = 9.66\%$$

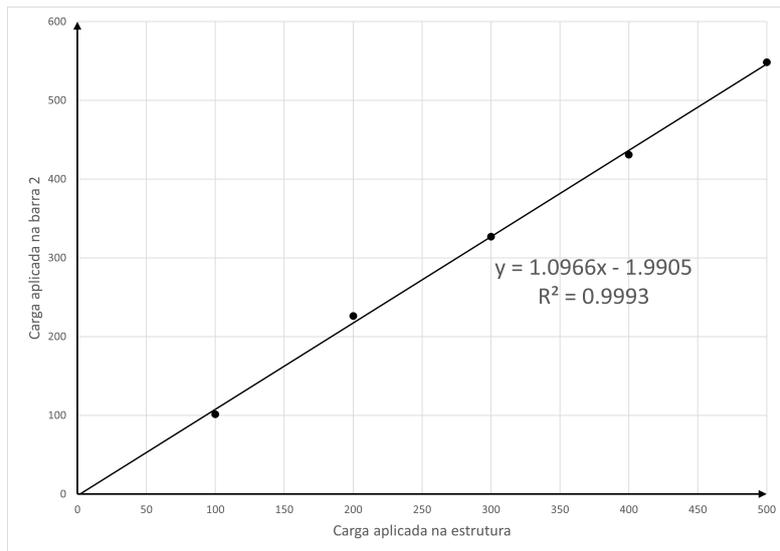


Figura 12: Relação entre a carga aplicada na barra FH e a carga aplicada na estrutura

Faz-se o mesmo para o membro CH, que se encontra à tração:

Esforços na barra CH					
Carga na Barra [N]		Erro		Declive	
Experimental	Teórico	Absoluto	Relativo [%]	Reta experimental	Reta teórica
0.6	0.0	0.6	N.D.		
104.4	100.0	4.4	4.4		
228.5	200.0	28.5	14.3		
327.0	300.0	27.0	9.0	1.0885	1.0000
430.2	400.0	30.2	7.6		
547.4	500.0	47.4	9.5		

Tabela 7: Comparação entre os resultados experimentais e teóricos dos esforços na barra CH

$$|E_r(\%)| = \frac{|1.0000 - 1.0885|}{|1.0000|} \times 100 = 8.85\%$$

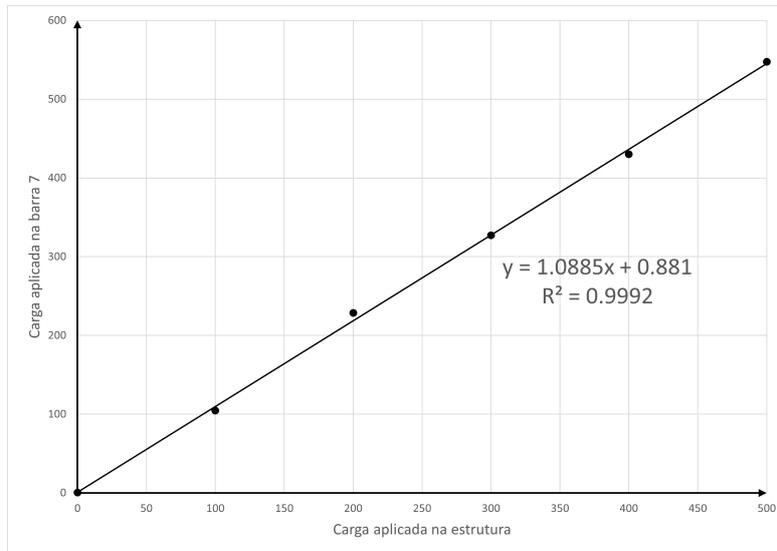


Figura 13: Relação entre a carga aplicada na barra CH e a carga aplicada na estrutura

## 5 Conclusões

### O modelo teórico idealizado (barras de peso desprezável unidas por pinos sem atrito e cargas aplicadas nos nós) consegue prever o comportamento da treliça?

A atividade desenvolvida permitiu-nos não só compreender a importância de elementos como as treliças na componente estrutural/funcional de vários projetos, como também entender, de uma forma mais prática, o seu funcionamento e aplicação no mundo real. De facto, ao longo da experiência, também foi possível comparar e averiguar a fiabilidade de métodos teóricos (método dos nós), ao mesmo tempo que procurávamos compreender de que forma é que os diversos erros afetavam os resultados.

Consideramos importante, antes de comentar e analisar os resultados, explicitar a utilização das pré-cargas aplicadas na estrutura. Na realidade, estas permitem uma redução de erros, ao mesmo tempo que garantem as condições de segurança da atividade, visto que visam garantir o contacto entre as barras e os nós, eliminando possíveis instabilidades e erros de montagem.

Ao analisar os  $R^2$  (coeficiente da regressão linear) de ambos os gráficos, é possível verificar que se encontram ambos bastante próximos de 1, sendo, portanto, um bom indicador da fiabilidade e da precisão dos pontos obtidos. No entanto, ao comparar os declives experimentais com os teóricos existe uma maior discrepância, quantificada pelos valores relativamente elevados dos erros relativos, fatores indicativos de uma não tão boa exatidão. Assim, é possível identificar possíveis erros (quer de carácter sistemático como aleatório) que poderiam afetar os resultados: aproximações relativas aos ângulos de aplicação dos carregamentos externos central ( $90^\circ$ ) e lateral ( $30^\circ$ ) que afetam diretamente a forma como as forças interagem com a estrutura; a elevada sensibilidade do aparelho de regulação da carga exercida, o que dificultava a escolha dos valores pretendidos; considerações teóricas utilizadas de forma a simplificar os cálculos, como o desprezo do peso das barras e a ausência de atrito nos pinos; e alguns problemas técnicos entre o software e os extensómetros, que poderiam levar a uma leitura menos precisa dos dados.

Concluindo, e não obstante os erros referidos, acreditamos que os resultados obtidos são confiáveis e nos permitem considerar o modelo teórico idealizado como uma excelente aproximação à realidade, já que nos permite prever com uma precisão razoável o comportamento de uma treliça.

---

## Bibliografia

- [1] F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector Mechanics for Engineers: Statics*: 2018 McGraw-Hill Education A. Nonymous et al. 2005
- [2] J.L. Meriam, L.G. Kraige, J.N. Bolton, *Engineering Mechanics: Statics*: 2020 Wiley A.N. Other & S.O.M. Ebody 2004
- [3] R.C. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics*: 2015 Pearson