Mecânica Orbital, 2023/24
Trabalho Para Casa #1 (TPC-1)

Data limite de entrega: 2/Out/2023, 23:59

Instruções para o TPC. Leia atentamente e preencha correctamente o solicitado abaixo. **Após preenchida, esta folha deve ser entregue em conjunto com as resoluções e respostas solicitadas no trabalho. A classificação só será atribuída se todos os campos estiverem correctamente preenchidos.**

Grupo. Indique o número de grupo de TPC, de acordo com o fenix:

Grupo #: 6

Compromisso de honra. Ao entregar este trabalho de casa com a sua identificação incluída, os alunos estão automaticamente a declarar que realizaram o trabalho nas condições do compromisso de honra seguinte:

> Declaro por minha honra que a prova foi resolvida recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação, por qualquer meio, com qualquer pessoa fora do grupo e cumprindo todas as regras indicadas da disciplina. Em particular, não foram utilizados quaisquer elementos realizados por outrem com resoluções adaptadas a esta prova.

Identificação e participação. Preencham de modo legível os (i) número de aluno, (ii) nome completo, e (iii) a percentagem de participação de cada aluno no trabalho, de acordo com o indicado mais abaixo

Número	Nome	%
103354	Lourenço Garcia Faria	4
102939	Mariana Fernandes Alves Cardoso Pires	4
103285	Tiago Cruz Clamote	4

A percentagem de participação de cada aluno no trabalho deve ser um número inteiro de 0 a 4, em que 4 é 100% do trabalho devido de cada aluno, 3 é 75% do trabalho devido, etc., até 0, caso o aluno não tenha participado. Este valor deve ser consensual entre alunos. A classificação de cada aluno é a classificação do trabalho multiplicada pela percentagem de participação. Em caso de divergência, o grupo deve apelar o mais depressa possível ao professor responsável pela disciplina. **O preenchimento do campo % é obrigatório, sob pena de anulação da classificação.**

Parâmetro adimensional. No enunciado de alguns problemas será usado um parâmetro adimensional χ obtido a partir dos números de alunos dos membros do grupo. Para um grupo constituído por N alunos, seja n_i o número que se obtém a partir do número do aluno i mantendo apenas os três últimos algarismos. Seja

$$p = \prod_{i=1}^{N} n_i.$$

Seja q o número constituído pelos 3 últimos algarismos de p. Então, $\chi = \dfrac{q}{1000}$.

Exemplo. Um grupo é constituído por 3 alunos:

$p = 354 \times 939 \times 285 = 94735\underline{710} \Rightarrow q = 710 \Rightarrow \chi = \frac{710}{1000} = 0{,}710$

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{A, com número } 100\underline{123} & \Rightarrow & n_A = 123 \\ \text{B, com número } 101\underline{412} & \Rightarrow & n_B = 421 \\ \text{C, com número } 90\underline{321} & \Rightarrow & n_C = 321 \end{array}\right\} \Rightarrow p = n_A \times n_B \times n_C = 16622\underline{343} \Rightarrow q = 343 \Rightarrow \chi = \frac{q}{1000} = 0.343$$

χ do grupo. Calcule o χ do grupo de acordo com a fórmula e exemplo acima e indique-o na caixa:

χ do grupo $=$ 0,710

1

a) Nesta alínea pretende-se obter os diferentes valores para a velocidade (km/s), período (ano) e o tempo que a luz do sol demora a atingir cada um dos planetas em estudo (8 planetas e 1 planeta anão).
Considerando a órbita como sendo circular, temos a seguinte fórmula para a aceleração:

$$(1) \quad \boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$ (ACELERAÇÃO ÓRBITA CIRCULAR),

Onde v é a velocidade orbital e r a distância ao corpo central.
Considerando também a segunda lei de Newton e a fórmula da gravitação universal:

$$(2) \quad \boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$ (SEGUNDA LEI DE NEWTON)

$$(3) \quad \boxed{\vec{F}(r) = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \vec{e_r}}$$ (FÓRMULA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL)

Ao igualarmos (2) a (3) e substituindo a aceleração por (1) podemos obter uma equação que nos permite obter a velocidade órbital, onde o parâmetro gravitacional é dado por $\mu = m \cdot G$:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} m_2 \vec{a} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \cancel{m_2} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} = \frac{m_1 \cdot \cancel{m_2} \cdot G}{r^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{m_1 \cdot G}{r}} \Leftrightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}} \quad (4)$$ VELOCIDADE ORBITAL

Podemos obter o período orbital através da seguinte relação com a velocidade:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \frac{\text{Perímetro}}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{r} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi \cdot r^{3/2}}{\sqrt{\mu}}} \quad (5)$$ PERÍODO ORBITAL

Finalmente, para determinar o tempo necessário para a luz do Sol atingir um determinado planeta podemos relacionar este com a distancia ao corpo central, r, e a velocidade da luz, cujo valor vamos considerar $c = 299\,792\,458$ m/s:

$$(6) \quad \boxed{\Delta t = \frac{r}{c}}$$ TEMPO QUE A LUZ DO SOL DEMORA ATÉ ATINGIR O PLANETA

Assim, através destas equações podemos finalmente obter os valores pretendidos, sendo que como o Sol é o corpo central vamos assumir $\mu = \mu_\odot$ para os cálculos.

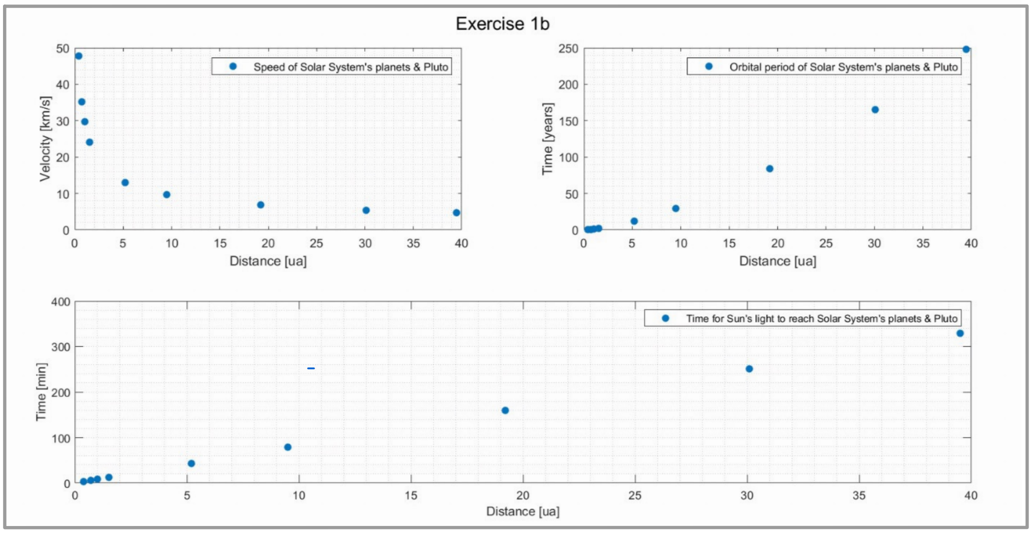
	Mercúrio	Vénus	Terra	Marte	Júpiter
r [ua]	0.39	0.72	1	1.52	5.2
v [km/s]	47.691	35.100	29.783	24.157	13.061
T [ano]	0.24358	0.61099	1.0001	1.8741	11.859
Δt [min]	3.2436	5.9881	8.3169	12.642	43.248

Continuação da tabela:

	Saturno	Urano	Neptuno	Plutão
r [ua]	9.5	19.2	30.1	39.5
v [km/s]	9.6629	6.7970	5.4286	4.7388
T [ano]	29.284	84.138	165.15	248.28
Δt [min]	79.010	159.68	250.34	328.52

É importante referir que o período foi calculado para anos Julianos.

b) Recorrendo a um programa em Matlab e aos valores da alínea anterior, foi possível obter o seguinte gráfico pedido:

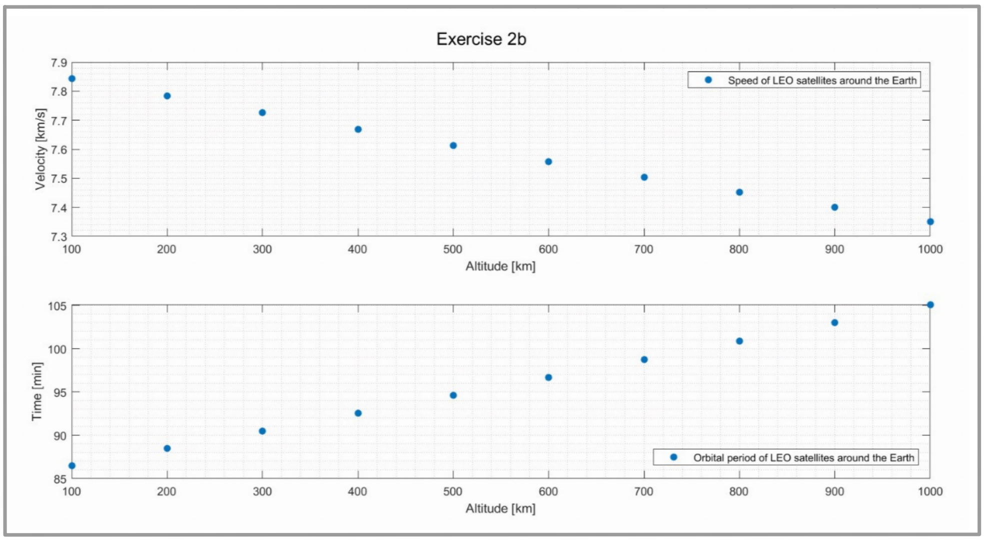


2

a) Considerando órbitas circulares em torno da Terra temos que a distância entre os centros de massa é dada por $r = h + R_\oplus$, onde h é a altitude a que o corpo se encontra da Terra. Como o corpo central, neste exercício, é a Terra então vamos considerar $\mu = \mu_\oplus$ para o parâmetro gravitacional nas equações. Assim, recorrendo novamente às fórmulas de velocidade orbital (4) e período orbital (5) e a um programa desenvolvido em Matlab obteve-se a seguinte tabela:

h [km]	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
v [km/s]	7.8442	7.7843	7.7258	7.6686	7.6127	7.5579	7.5044	7.4519	7.4005	7.3502
T [min]	86.481	88.491	90.517	92.558	94.614	96.684	98.770	100.87	102.98	105.12

b) Recorrendo a um programa em Matlab e aos valores da alínea anterior, foi possível o seguinte gráfico pedido:



c) Através do mesmo método utilizado da alínea a) desta mesma pergunta, obtiveram-se os seguintes valores:

	GPS	Galileu	GLONASS
h [km]	20180	23222	19130
v [km/s]	3.8741	3.6696	3.9530
T [h]	11.965	14.078	11.262

d) Uma órbita é definida como estacionária quando a sua rotação acompanha exatamente a rotação da Terra. Neste caso vamos considerar o tempo sideral, sendo, por isso, o período estacionário dado pelo valor $T = 86164.09\ s$. Definindo novamente a distância ao corpo central como $r = h + R_\oplus$ e recorrendo às equações (4) e (5), obtém-se as seguintes novas fórmulas que permitem determinar a altitude, h, e a velocidade orbital, v:

$$T = \frac{2 \cdot r^{3/2}}{\sqrt{\mu_\oplus}} \underset{r = h + R_\oplus}{=} \frac{2 \cdot (h + R_\oplus)^{3/2}}{\sqrt{\mu_\oplus}} \rightarrow \boxed{h = \left(\frac{T \cdot \sqrt{\mu}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - R_\oplus} \quad (7)$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r}} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{h + R_\oplus}}} \quad (8)$$

Substituindo os valores dados nestas equações podemos finalmente obter o valor da altitude e velocidade para uma órbita estacionária.

$$h = \left(\frac{86164.09\ s \times \sqrt{3.986 \times 10^5\ km^3/s^2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 6378\ km \rightarrow \underline{h = 35786\ km}$$

$$v = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5\ km^3/s^2}{35786\ km - 6378 km}} \rightarrow \underline{v = 3.0747\ km/s}$$

e) Utilizando o valor da distância entre os centros de massa da Lua e da Terra, $r = 384.40 \cdot 10^3$ Km e através das equações (4) e (5) temos:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \ Km^3/s^2}{384.4 \times 10^3 \ Km}} \rightarrow \underline{v = 1.0183 \ Km/s}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 384.4 \times 10^3 \ Km}{1.018303 \times 24 \times 3600} \rightarrow \underline{T = 27.452 \text{ dias solares médios}}$$

3 A distância da Terra ao sol é definida por d = 1U.a e a sonda SOHO encontra-se a uma altitude h em relação à Terra. Consequentemente a distância da Sonda ao Sol é dada por d - h.

A aceleração gravítica para um corpo a uma distância r do corpo central é dada pela seguinte fórmula:

$$(9) \quad \boxed{a_g = \frac{\mu}{r^2}}$$

Substituindo a_g na expressão da força gravítica temos:

$$F_g = m \cdot a_g \Rightarrow \boxed{F_g = \frac{m \cdot \mu}{r^2}} \quad (10)$$

O módulo da força gravítica da sonda SOHO resulta da soma entre a contribuição da Terra e da contribuição do Sol:

$$\boxed{F_{g,SOHO} = \underbrace{\frac{m_{SOHO} \cdot \mu_{\odot}}{(d-h)^2}}_{\text{Contrib. do Sol}} - \underbrace{\frac{m_{SOHO} \cdot \mu_{\oplus}}{h^2}}_{\text{Contr. da Terra}}} \quad (11)$$

Sendo o sinal negativo na contribuição da terra devido a esta ter vetorialmente o sentido negativo no referencial heliocêntrico.

Considerando-se $r = d - h$ para a sonda SOHO e recorrendo a equações anteriormente mencionadas temos o seguinte sistema que nos permite obter uma nova expressão para a força gravítica a que esta está sujeita, em função da distância r, da sua massa e do período orbital:

$$\begin{cases} v_{SOHO} = \frac{\text{Perímetro}}{T} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot (d-h)}{T} & (a) \\ a_{c\,SOHO} = \frac{v^2_{SOHO}}{r} = \frac{v^2_{SOHO}}{d-h} \overset{a)}{=} \frac{4\pi^2 (d-h)}{T^2} & (b) \\ F_g^{SOHO} = m_{SOHO} \cdot a_{g\,SOHO} \overset{b)}{=} \boxed{m_{SOHO} \cdot \frac{4\pi^2 (d-h)}{T^2}} & (12) \end{cases}$$

De acordo com o enunciado o período de órbita da Sonda tem de coincidir com o período de órbita da Terra, logo conclui-se daí que $T_{SOHO} = 31558464\ s$ (1 ano Sideral).
Igualando (11) a (12) obtemos o seguinte polinómio de 5° grau:

$$m_{SOHO} \times \frac{4\pi^2 (d-h)}{T^2} = \frac{m_{SOHO} \cdot \mu_\odot}{(d-h)^2} - \frac{m_{SOHO} \cdot \mu_\oplus}{h^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{4\pi^2}{T^2} h^5 + \frac{12\pi^2 d}{T^2} h^4 - \frac{12\pi^2 d^2}{T^2} h^3 + \frac{T^2\mu_\oplus - T^2\mu_\odot + 4\pi^2 d^3}{T^2} h^2 - 2\mu_\oplus d h + \mu_\oplus d^2 = 0} \quad (13)$$

Desenvolveu-se um programa em Matlab com o objetivo de determinar as soluções deste polinómio de grau 5, em ordem a h, sendo estes os resultados obtidos:

$$C_5 h^5 + C_4 h^4 + C_3 h^3 + C_2 h^2 + C_1 h + C_0 = 0$$

	1
1	2.243970465384175e+08 + 1.295521983863012e+08i
2	2.243970465384175e+08 - 1.295521983863012e+08i
3	1.493560871719226e+06 + 0.000000000000000e+00i
4	-7.438269742768402e+05 + 1.300395727257109e+06i
5	-7.438269742768402e+05 - 1.300395727257109e+06i

$\Rightarrow h = 1.4936 \cdot 10^6\ Km$

	1 C_5	2 C_4	3 C_3
1	-3.963948671112742e-14	1.779020163595399e-05	-2.661414164738716e+03

4 C_2	5 C_1	6 C_0
1.625161497065166e+07	-1.192611200000000e+14	8.920731775999999e+21

valores para os coeficientes C_i, $i = 1, \dots, 5$

4

a) As fórmulas das energias por unidade de massa e em função de r, são:

(14) $\boxed{T(r) = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu_\oplus}{2r}}$ (ENERGIA CINÉTICA)

(15) $\boxed{V(r) = -\frac{\mu_\oplus}{r}}$ (ENERGIA POTENCIAL)

(16) $\boxed{\mathcal{E} = T(r) + V(r) = -\frac{\mu_\oplus}{2r}}$ (ENERGIA TOTAL)

Considerando a equação do Balanço de energia onde "i" corresponde a inicial e "f" à final:

$$\boxed{T(r)_i + V(r)_i = T(r)_f + V(r)_f} \quad (17)$$ (BALANÇO DE ENERGIA)

A velocidade de escape é a velocidade mínima a uma certa distância que permite chegar a infinito. A energia mínima que permite atingir infinito é dada por $v_f = K_f = U_f = 0$. Deste modo podemos obter a seguinte expressão para determinar a velocidade de escape:

$$K_i + U_i = \cancel{K_f}^{0} + \cancel{U_f}^{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 - \frac{\mu \cdot m}{r} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_e^2 = \frac{\mu \cdot \cancel{m}}{r} \rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}} \quad (18)$$

VELOCIDADE DE ESCAPE

Assim, para esta primeira alínea apenas precisamos de utilizar $\mu = \mu_\oplus$ e $r = R_\oplus$ para obter o valor da velocidade de escape pretendida:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 3.986000 \times 10^3 \ Km^3/s^2}{6378000 \ Km}} \Rightarrow \underline{v_e = 11.180 \ Km/s}$$

b) Desprezando a velocidade da Terra e substituindo os valores de $\mu = \mu_\odot$ e $r = 1$ u.a na equação (18) temos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 1.327 \times 10^{11} \ Km^3/s^2}{1.496 \times 10^8 \ Km}} \Rightarrow \underline{v_e = 42.120}$$

Não desprezando a velocidade da terra temos, através da equação (4) temos:

$$v_{Terra} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r}} \underset{r = 1 \text{ u.a}}{=} \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \ Km^3/s^2}{1.496 \times 10^8 \ Km}} = 29.783 \ Km/s$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r}} - v_{Terra} = \sqrt{\frac{2 \times 1.327 \times 10^{11} \ Km^3/s^2}{1.496 \times 10^8 \ Km}} - 29.78308388$$

$$\rightarrow \underline{v_e = 12.336 \ Km/s}$$

c) Para esta alínea apenas basta substituir $\mu = \mu_\odot$ e $r = R_\odot$ na expressão (18):

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 1.327 \times 10^{11} \ Km^3/s^2}{696\,000 \ Km}} \Rightarrow \underline{v_e = 617.51 \ Km/s}$$

d) Para esta alínea apenas basta substituir $\mu = \mu_{Lua}$ e $r = r_{Lua}$ na expressão (18):

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 4.9048696 \times 10^{12} \times 10^{-9} \ Km^3/s^2}{1738 \ Km}} \Rightarrow \underline{v_e = 2.3758} \ Km/s$$

e) Para esta alínea apenas basta substituir $\mu = \mu_{Marte}$ e $r = r_{Marte}$ na expressão (18):

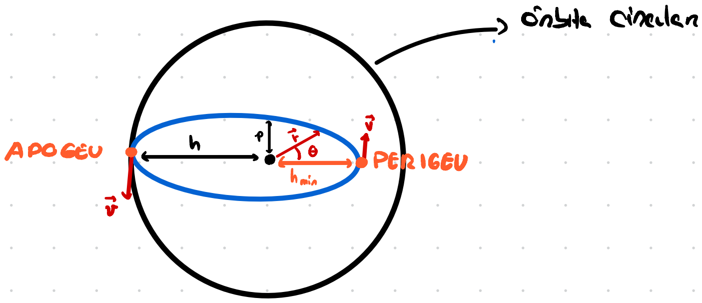
$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 4.282837 \times 10^{13} \times 10^{-9}\ Km^3/s^2}{3396\ km}} \Rightarrow \underline{v_e = 5.0222}\ Km/s$$

(5) Com o valor de X do grupo tem-se: $h = (500 + 100 \times 0,710) = 571$ Km.

Numa órbita circular a velocidade orbital não tem componente radial. Deste modo, ao haver uma variação do módulo da velocidade do satélite para que este passe a descrever uma órbita elíptica tem-se que analisar dois casos possíveis: quando o módulo da velocidade aumenta e quando este diminui. Importa referir que na passagem de uma órbita circular para uma órbita elíptica é necessário ter em conta o flight path angle, γ, na descrição da trajetória. O flight path angle implica que ao longo da órbita do satélite irá haver alteração do módulo da sua velocidade, sendo esta máxima na periápside e mínima na apoápside. A alteração da velocidade, que leva consequentemente à passagem da órbita circular para uma elíptica, ocorre num ponto com uma determinada altitude h.

No caso em que o módulo da velocidade aumenta no ponto de transição (quando comparado com o módulo da velocidade na órbita circular) pode-se concluir que este ponto é o perigeu. Assim, de acordo com o enunciado a altitude a que ocorreria essa transição seria a altitude mínima, o que é superior a 200 Km ($h = 500 + 100X > 200$ km), logo não faz sentido calcular uma excentricidade máxima, e_{min}, para uma altitude que nunca seria atingida (200 Km).

Para o caso em que o módulo da velocidade é inferior, pode-se concluir que o ponto onde esta alteração de velocidade ocorre é o apogeu ($h = h_a = 571$ Km) e, consequentemente, o ponto de h_{min} em relação ao foco é o perigeu ($h_{min} = 200$ Km) como exemplifica o seguinte desenho:



QUANDO OCORRE DIMINUIÇÃO DO MÓDULO DA VELOCIDADE

Da equação da órbita temos as seguintes expressões:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}} \quad (19) \qquad \boxed{p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}} \quad (20)$$

onde $\vec{r}$ corresponde ao vetor posição entre o foco e um ponto da elipse, θ o ângulo que $\vec{r}$ faz com a horizontal no sentido anti-horário como positivo e h o momento angular.

Também temos as seguintes expressões para as distâncias no apogeu, r_A, e perigeu, r_P:

$$\boxed{r_A = h_0 + R_\oplus} \quad (21) \qquad \boxed{(r_P)_{min} = h_{min} + R_\oplus} \quad (22)$$

Para obter uma expressão para calcular a excentricidade precisamos também da seguinte fórmula para "a":

$$\boxed{a = \frac{r_A + r_P}{2}} \quad (23)$$

Para o caso em estudo, no perigeu temos $\theta = 0°$ e para o apogeu $\theta = 180°$:

$$r_P = \frac{p}{1 + e\cos 0°} = \frac{a(1-e)\cancel{(1+e)}}{\cancel{(1+e)}} \Rightarrow e = 1 - \frac{r_P}{a}$$

Logo,

$$e_{máx} = 1 - \frac{r_{P\,min}}{a_{min}} \overset{(23)}{=} 1 - \frac{2 \cdot r_{P\,min}}{r_A + r_{P\,min}} = \frac{r_A + r_{P\,min} - 2r_{P\,min}}{r_A + r_{P\,min}} = \frac{r_A - r_{P\,min}}{r_A + r_{P\,min}} \Rightarrow$$

$$\overset{(20)}{\underset{(21)}{\Rightarrow}} \quad \boxed{e_{máx} = \frac{h_0 - h_{min}}{h_0 + h_{min} + 2R_\oplus}} \quad (24)$$

EXCENTRICIDADE MÁXIMA

Substituindo em (24) os valores fornecidos pelo enunciado temos:

$$e_{máx} = \frac{571\text{ km} - 200\text{ km}}{571\text{ km} + 200\text{ km} + 2 \times 6378\text{ km}} \Leftrightarrow \underline{e_{máx} = 0.027427}$$

6 Com $X = 0{,}710$ temos os seguintes valores:

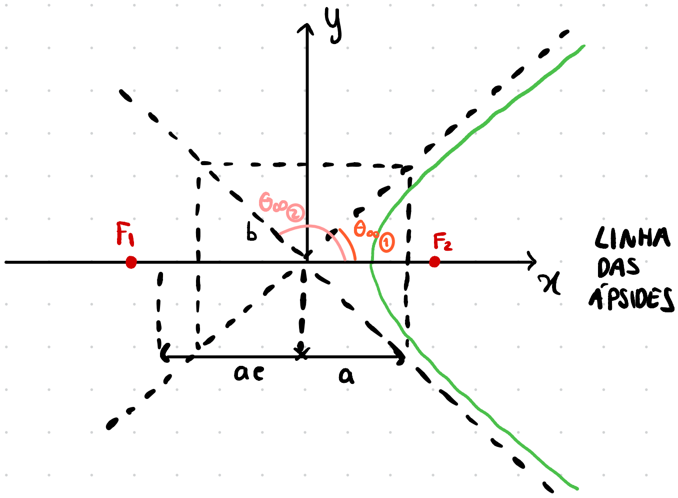
$a = (18800 + 100 \cdot 0{,}710) = 18871$ km

$e = (1.3482 + 0{,}710/10) = 1.4192$

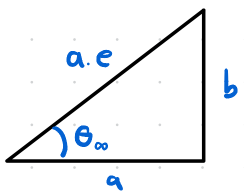
No infinito a energia total é igual à energia cinética, pela conservação da energia. Considerando $a<0$, para uma órbita hiperbólica, tem-se a seguinte expressão para a energia:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_\oplus}{\cancel{2}a} = \frac{v_\infty^2}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a}}} \quad (25)$$

Seguidamente está ilustrada os componentes de uma órbita hiperbólica:



Através de uma análise geométrica da órbita e sendo $b = a\sqrt{e^2-1}$:



$$a^2 + b^2 = a^2 + a^2(e^2-1) = a^2(\cancel{1} + e^2 - \cancel{1}) =$$

$$= a^2 . e^2 \Rightarrow \boxed{ae = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Logo, $\cos\theta_{\infty ①} = \dfrac{a}{ae} \overset{\theta_\infty > 0}{\Leftrightarrow} \theta_{\infty ①} = \arccos\left(\dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}e}\right) = \boxed{\arccos\left(\dfrac{1}{e}\right) = \theta_{\infty ①}}$ (26)

Para a outra assíntota onde $a<0$ obtém-se um outro ângulo $\theta_{\infty ②}$, cujo valor pode ser calculado a partir da equação de órbita:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \overset{r=\infty}{\Rightarrow} \infty = \frac{p}{1 + e\cos\theta_{\infty ②}} \Leftrightarrow 1 + e\cos\theta_{\infty ②} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{\infty ②} = \arccos\left(\frac{-1}{e}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{e}\right)} \quad (27)$$

Deste modo, substituindo os valores do enunciado nestas expressões (25), (26) e (27) tem-se:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \ km^3/s^2}{18\,871 \ km}} = \underline{4.5959 \ km/s}$$

$$\theta_{\infty ①} = \arccos\left(\frac{1}{1.4192}\right) = \underline{0.78890 \ rad} \rightarrow \text{Foco } F_1$$

$$\theta_{\infty ②} = \pi - \arccos\left(\frac{1}{1.4192}\right) = \underline{2.3527 \ rad} \rightarrow \text{Foco } F_2$$

7) Com $X = 0{,}710$ temos os seguintes valores:

$$h_{mín} = (200 + 20 \times 0.710) = 214.2 \text{ Km}$$
$$h_{máx} = (700 - 100 \times 0.710) = 629 \text{ Km}$$

a) Sendo $2a$ a distância do perigeu ao apogeu e a distância $r = h + R_\oplus$ tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a = r_A + r_P \\ r = h + R_\oplus \end{cases} \Rightarrow a = \frac{h_{máx} + h_{mín} + 2R_\oplus}{2}$$

Substituindo com os valores do enunciado:

i) $$a = \frac{629 \text{ Km} + 214.2 \text{ Km} + 2 \times 6378 \text{ Km}}{2} \Leftrightarrow \underline{a = 6799.6 \text{ Km}}$$

Semi-eixo maior

ii) Recorrendo à expressão (19) e (20) temos, para a apoápside, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{p}{1 + e \cos 180} \\ p = a(1-e) \end{cases} \Leftrightarrow r_a = \frac{a\cancel{(1-e)}(1+e)}{\cancel{(1-e)}} \Leftrightarrow r_a = a(1+e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{r_a}{a} - 1} \quad (28)$$

Substituindo pelos valores dados:

$$e = \frac{h_{máx} + R_\oplus}{a} - 1 = \frac{629 \text{ Km} + 6378 \text{ Km}}{6799.6 \text{ Km}} - 1 \Rightarrow \underline{e = 0.030502}$$

iii) Recorrendo à expressão da energia (16):

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_\oplus}{2a} = \frac{-3.986 \times 10^5 \text{ Km}^3/s^2}{2 \times 6799.6 \text{ Km}} \Leftrightarrow \mathcal{E} = -29.310 \frac{\text{MJ}}{\text{Kg}}$$

iv) Analisando a expressão (19) em ordem a h (momento angular) tem-se:

$$\boxed{a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu} \Leftrightarrow h = \sqrt{a(1-e^2).\mu}} \quad (29)$$

Substituindo os valores na expressão:

$$h = \sqrt{6799.6\ km \times (1 - 0.030502^2) \times 3.986 \times 10^5\ km^3/s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = 52\,036\ km}$$

v) Alterando a expressão (5) agora de acordo com o perímetro de uma elipse:

$$T = \frac{2\pi \cdot ab}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_\oplus}} \cdot a^{3/2} = \frac{2\pi \times (6799.6\ km)^{3/2}}{\sqrt{3.986 \times 10^5\ km^3/s^2}} \Rightarrow$$

$$A_{elipse} = ab.\pi = \frac{1}{2} h.T \qquad \Rightarrow \underline{T = 5\,580.0\ s = 93.000\ min}$$

b) Para calcular a anomalia verdadeira θ relativa a uma altitude de 400 km vamos utilizar a expressões (18) e (19):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$R_\oplus + h = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \Leftrightarrow 1 + e\cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{R_\oplus + h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{e} + \frac{a}{e}\frac{(1-e^2)}{(R_\oplus + h)} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left[-\frac{1}{e} + \frac{a}{e}\frac{(1-e^2)}{(R_\oplus + h)}\right] \Leftrightarrow$$

$\theta > 0$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left[\frac{-1}{0.030502} + \frac{6799.6\ km}{0.030502} \times \frac{(1 - 0{,}030502^2)}{(6378\ km + 400\ km)}\right] \Leftrightarrow$$

Substituindo os valores dados

$$\Leftrightarrow \underline{\theta = 1.4968\ Rad}$$

Assumindo θ como positivo podemos agora obter um valor para a anomalia excêntrica, representada por um "E":

$$(30) \quad \boxed{\tan E = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \operatorname{sen}\theta}{e + \cos\theta}} \Leftrightarrow E = \arctan\left[\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \operatorname{sen}\theta}{e + \cos\theta}\right] =$$

$$= \arctan\left[\frac{\sqrt{1 - 0.030502^2} \times \operatorname{sen}(1.496850)}{0.030502 + \cos(1.496850)}\right] \Rightarrow \underline{E = 1.4665\ rad}$$

Substituindo os valores dados

Estes valores permitem, finalmente, calcular o tempo do perigeu para o θ previamente calculado, como se encontra explícito posteriormente:

$$\boxed{M = n(t-t_0) = E - e\,\text{sen}E} \quad (31) \quad \text{(equação de Euler)}$$

Como $\Delta t = t - t_0$ e $n = \frac{2\pi}{T}$ é possível modificar a expressão da seguinte maneira:

$$n \cdot \Delta t = E - e.\text{sen}E \Leftrightarrow \Delta t = \frac{E - e.\text{sen}E}{2\pi/T} =$$

$$= \frac{1.466461 - 0.03050179 \times \text{sen}(1.466461)}{2\pi / 5580.026\ s} \Rightarrow \underline{\Delta t = 1275.4\ s} = 21.257\ min$$

tempo abaixo dos 400 km

Por último, o tempo para altitudes superiores a 400 km resulta da seguinte subtração:

$$\Delta t_{\text{acima de } 400\text{ km}} = T - 2.\Delta t = 5580.026\,s - 2 \times 1275.4\,s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta t = 3029.2\ s} = 50.487\ min$$

tempo acima dos 400 km

(8) Com $X = 0,710$ temos os seguintes valores:

$v = (36800 + 200 \times 0.710) = 36942$ Km/h $= 10.26167$ km/s

$h = (500 + 20 \times 0.710) = 514.2$ km

a) Com base nos valores de altitude do satélite e respetiva velocidade podemos estimar o valor de a, semi-eixo maior. É importante mencionar que este orbita em relação à Terra

$r_0 = h_0 + R_\oplus$

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu_\oplus}} \Leftrightarrow a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu_\oplus}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{h_0 + R_\oplus}{2 - \frac{(h_0 + R_\oplus) v_0^2}{\mu_\oplus}} \Leftrightarrow a = \frac{514.2\ km + 6378\ km}{2 - \frac{(514.2\ km + 6378\ km) \times (10.26167\ km/s)^2}{3.986 \times 10^5\ km^3/s^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = 38\,456\ km}$$

Calculando a excentricidade temos, para $\gamma = 0$, visto que não há velocidade radial:

$$e^2 = \left(\frac{r_0 . v_0^2}{\mu_\oplus} - 1\right)^2 . \underbrace{\cos^2 \gamma_0}_{1} + \underbrace{\sin^2 \gamma_0}_{0} \Rightarrow e = 0.82077$$

A partir deste obtemos $h_{máx}$:

$$h_{máx} = r_a - r_\oplus = a(1+e) - R_\oplus = 3845566 \text{ km} \times (1 + 0.8207754) - 6378 \text{ km} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{máx} = 63641 \text{ km}$$

b) Queremos que o satélite tenha um flight path angle inicial, γ_0, que permita um perigeu de no mínimo 200km. Tendo em conta que as velocidades e altitudes iniciais não variaram, isso implica que o eixo-maior que descreve a órbita elíptica mantém-se em comparação com o da alínea anterior.

Com base neste valor podemos obter a excentricidade da fórmula que descreve a posição do perigeu:

$$r_p = a(1-e) \Leftrightarrow e = 1 - \frac{r_p}{a} \Leftrightarrow e = 1 - \frac{200 \text{ km}}{3845566 \text{ km}}$$

$$\Rightarrow e = 0.82078$$

Recorrendo à expressão que relaciona o momento angular e o flight path angle temos:

$$\begin{cases} h = a(1-e^2) = \dfrac{h^2}{\mu_\oplus} \\ h = v_0 . r_0 . \cos \gamma_0 \end{cases} \Rightarrow a(1-e^2) = \frac{(v_0 . r_0 . \cos \gamma_0)^2}{\mu_\oplus} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3845566 \times (1 - 0.8207754^2) = \frac{(10.26167 \text{ km/s} \times 514.2 \text{ km} . \cos \gamma_0)^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = 0.20466 \text{ rad} = 11.726^\circ$$

Deste modo para que o satélite nunca desça abaixo da altitude mencionada no enunciado, $h_{mín} = 200$km, é necessário se verificar a seguinte condição:

$$\boxed{|\gamma_0| < 11.726^\circ}$$

9) Com $X = 0,710$ temos os seguintes valores:

$$v_0 = \left(0.8500 + \frac{0.710}{10}\right) v_T = 0.921\, v_T = 0.921 \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_\oplus}} \quad \text{, onde } r_\oplus = 1 \text{ u.a}$$

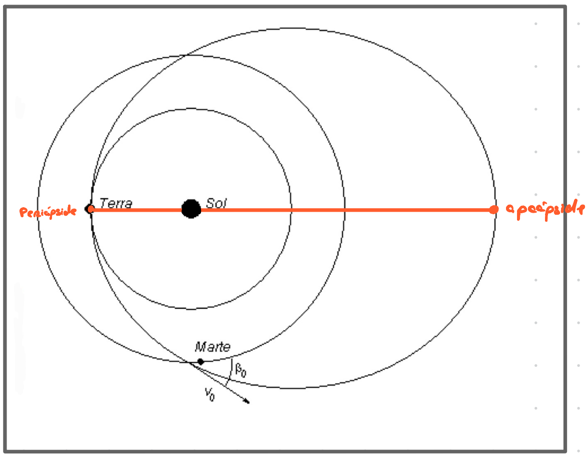


FIGURA DO ENUNCIADO

Para este exercício consideramos as órbitas de Marte e da Terra como sendo circulares. A partir da imagem conclui-se que $\gamma_0 > 0$, isto é, a anomalia $\theta_0 \in 1°$ Quadrante ou $\theta_0 \in 2$ Quadrante.

a) O semi-eixo maior pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\boxed{a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 . v_0^2}{\mu_\odot}}} \quad (32)$$

Como $r_{Marte} = \frac{3}{2} r_\oplus$ e substituindo os valores temos:

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu_\odot}} \overset{r_0 = r_{Marte}}{=} \frac{(3/2) . r_\oplus}{2 - \frac{(3/2) r_\oplus . v_0^2}{\mu_\odot}} = \frac{(3/2) r_T}{2 - \frac{(3/2) r_T \times (0.921\, v_T)^2}{\mu_\odot}} =$$

$$= \frac{(3/2) r_T}{2 - \left(\frac{3}{2}\right) \times \frac{(0.921\, v_T)^2\, r_T}{\mu_\odot}} = \frac{(3/2) r_T}{2 - \left(\frac{3}{2}\right) \times (0.921)^2} = \frac{3 \times 6378 \text{ km}}{4 - 3 \times (0.921)^2} =$$

$$\Rightarrow \quad a = 2.0615\, r_T$$

A excentricidade pode ser obtida pelas expressões (18) e (19), considerando a anomalia $\theta = 0°$, visto que se trata da periápside:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r_p = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_p}{a} = 1 - e \overset{r_p = r_T}{\Leftrightarrow} e = 1 - \frac{r_T}{a} \Leftrightarrow e = 1 - \frac{r_T}{2.061463\, r_T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{e = 0.5149077}$$

Recorrendo às equações (20) e (29) podemos calcular o momento angular:

$$\frac{h^2}{\mu_\odot} = a(1-e^2) \Leftrightarrow h = \sqrt{a.\mu_\odot(1-e^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4-3(0.921)^2} \cdot r_T \cdot \mu_\odot \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{4-3(0.921)^2}{3}\right)^2\right]} =$$

$$\boxed{v_T = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_T}} \Leftrightarrow \mu_\odot = v_T^2 \cdot r_T}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4-3(0.921)^2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{4-3(0.921)^2}{3}\right)^2\right] \cdot r_T^2 \cdot v_T^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4-3(0.921)^2}\left[1 - \left(1 - \frac{4-3(0.921)^2}{3}\right)^2\right]} \cdot r_T v_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = 1.2308 \cdot r_T \cdot v_T \text{ km}}$$

b) A energia da sonda pode ser estimada a partir da fórmula (16):

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_\odot}{2a} = -\frac{\mu_\odot}{2} \cdot \frac{4-3(0.921)^2}{3 \cdot r_T} = -v_T^2 \cdot \frac{4-3(0.921)^2}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{E} = -0.24255 \cdot v_T^2} \quad \text{km}^2/\text{s}^2$$

c) O flight path angle pode ser obtido através da definição do momento angular para órbitas elípticas,

$$h = r_0 \cdot v_0 \cdot \cos \gamma_0 \Leftrightarrow \cos \gamma_0 = \frac{h}{r_0 \cdot v_0} \Leftrightarrow \gamma_0 = \arccos\left(\frac{h}{r_0 \cdot v_0}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 = \arccos\left(\frac{h}{(3/2)\, r_T \times (0.921)\, v_T}\right) \Leftrightarrow \gamma_0 = \arccos\left(\frac{1.230816 \times \cancel{r_T \times v_T}}{(3/2) \times \cancel{r_T \times v_T} \times (0.921)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\gamma_0 = 0.47141 \text{ rad} = 27.010^\circ}$$

d) A anomalia verdadeira, θ, pode ser obtida recorrendo às expressões (18) e (19):

$$r_0 = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot \cos\theta} \Leftrightarrow 1 + e\cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{r_0} \Leftrightarrow e\cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{r_0} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{r_0 \cdot e} - \frac{1}{e} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{a(1-e^2)}{r_0 \cdot e} - \frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{a(1-e^2)}{(3/2)\, r_T \cdot e} - \frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2.061463\, \cancel{r_T} \times (1 - 0.5149077^2)}{(3/2)\, \cancel{r_T} \times 0.5149077} - \frac{1}{0.5149077}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\theta = 1.5515 \text{ rad} = 88.894^\circ}$$

e) A excentricidade foi obtida nos cálculos intermédios da alínea a):

$$\underline{e = 0.5149077}$$

f) O semi-eixo menor pode ser obtido da seguinte maneira, com $b = a\sqrt{e^2 - 1}$:

$$a = \frac{3\, r_T}{4 - 3(0.921)^2} \Big\}$$ Semi-eixo maior

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{3}{4 - 3(0.921)^2} \times \sqrt{1 - e^2} \times r_T =$$

$$= \frac{3}{4 - 3(0.921)^2} \times \sqrt{1 - 0.5149077^2} \times r_T \Rightarrow \underline{b = 1.7672\, r_T \text{ km}}$$

g) Para determinar o tempo de viagem, é necessário determinar a anomalia excêntrica, a qual representa a trajetória da Sonda entre a Terra e Marte. Para isso, recorremos à seguinte expressão:

$$\boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{E}{2}\right)\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \quad (33) \quad \Leftrightarrow$$

Substituindo pelos valores previamente obtidos

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{E}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \Leftrightarrow E_0 = 2\arctan\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_0 = 2\arctan\left[\tan\left(\frac{1.551494\,\text{rad}}{2}\right) \times \sqrt{\frac{1-0.5149077}{1+0.5149077}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 = 1.0134$$

Para determinar o tempo da viagem basta recorrer à equação de Euler (31):

$$M = n(t-t_0) = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a^3}}\,.(t-t_0) = E - e\,\text{sen}\,E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = (E - e\,\text{sen}\,E)\,.\sqrt{\frac{a^3}{\mu_\odot}} + t_0$$

Sendo $t_0 = 0$ na Terra e $\mu_\odot = v_T^2 \cdot r_T$, temos:

$$t = (1.013431 - 0.5149077 \times \text{sen}(1.013431)) \times \sqrt{\frac{(2.061463\, r_T)^3}{v_T^2 \cdot \cancel{r_T}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = (1.013431 - 0.5149077 \times \text{sen}(1.013431)) \times (2.061463)^{1.5} \cdot \frac{r_T}{v_T} \Leftrightarrow$$

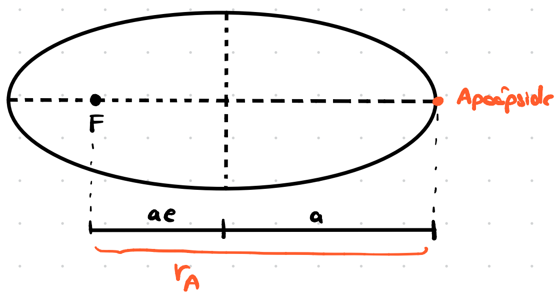
$$\Leftrightarrow t = 1.7062\,\frac{r_T}{v_T} = t = 1.7062 \times \frac{u.a}{v_T}$$

h) A distância máxima vai corresponder ao raio da apoápside:

$$r_A = a + ae =$$

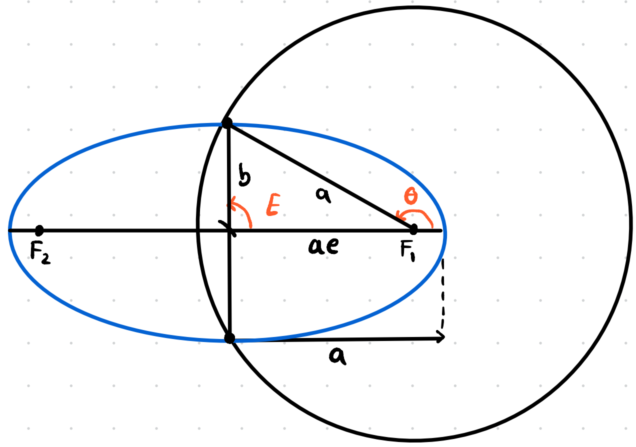
$$= 2.061463\, r_T + 2.061463 \times 0.5149077 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_A = 3.1229\ u.a$$



A sonda nunca vai colidir com nenhum planeta, visto que $r_A < 5.2$ ua que corresponde à distância de Júpiter ao Sol, sendo este o planeta mais próximo.

(10) Pretendemos mostrar que o módulo da velocidade de um satélite numa órbita elíptica em ambas as extremidades dos semi-eixos menores é igual ao caso de um satélite numa órbita circular que passa por esses pontos. Para isso começamos por analisar a seguinte figura que representa este contexto:



Para se obter o valor do módulo da velocidade para uma órbita elíptica pode-se recorrer às fórmulas da energia (14), (15) e (16) de onde temos:

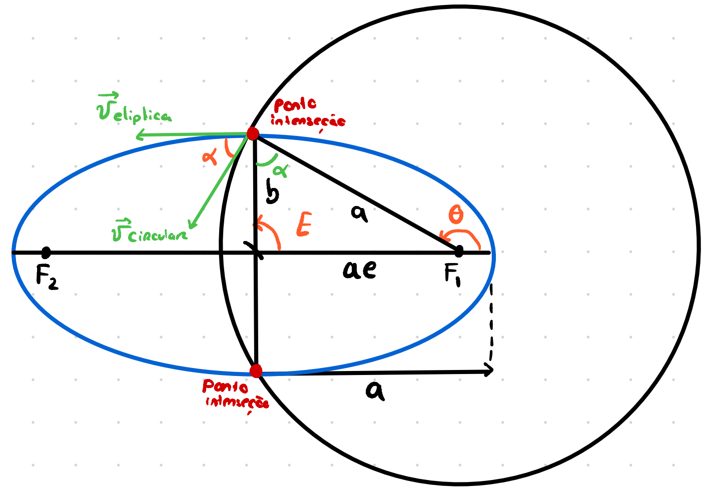
$$\mathcal{E} = T(r) + U(r) \Leftrightarrow -\frac{\mu_\oplus}{2a} = \frac{v_e^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r} \Leftrightarrow \longrightarrow$$ resolvendo em ordem à velocidade elíptica

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{\mu_\oplus}{2a} + \frac{\mu_\oplus}{r}\right] \cdot 2 = v_e^2 \Leftrightarrow \boxed{v_e = \sqrt{2 \cdot \mu_\oplus \left(\frac{-1}{2a} + \frac{1}{r}\right)}} \quad (34)$$

Para uma órbita circular tem-se a velocidade explícita na expressão (4). Deste modo também podemos obter uma expressão para a velocidade elíptica ao substituir $r=a$ nesta expressão (4) e na expressão (34):

$$\boxed{V_e = \sqrt{2 \cdot \mu_\oplus \left(\frac{-1}{2a} + \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a}} = v_{circular}} \quad (35)$$

Também é necessário mencionar o sentido da direção. Considerando que a revolução ocorre no sentido anti-horário (direto).



Com a fórmula (30), que relaciona a anomalia verdadeira com a excêntrica, concluímos, pela análise da figura, que os pontos de intersecção são definidos por $E = \pm \frac{\pi}{2}$. Deste modo temos:

$$\tan\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-e^2}\,.\,\operatorname{sen}\theta}{e+\cos\theta} \Leftrightarrow \pm\infty = \frac{\sqrt{1-e^2}\,.\,\operatorname{sen}\theta}{e+\cos\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e + \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\cos\theta = -e} \quad (36)$$

Substituindo $\cos\theta = -e$ na equação de órbita (19) e esse resultado na (34):

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\theta} \underset{(38)}{=} \frac{a(\cancel{1-e^2})}{(\cancel{1-e^2})} \Rightarrow r_{eliptica} = a \Rightarrow$$

$$\underset{(37)}{\Rightarrow} \boxed{v_{eliptica} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = v_{circular}} \quad c.q.d$$

Por outro lado, analisando a figura tem-se que o ângulo α corresponde a γ, isto é, ao flight path angle.

Relacionando novamente (20) com (31), notando que para este caso $r_{eliptica} = a$ e que $v_{eliptica} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$:

$$h = r.v.\cos\gamma = \sqrt{a.\mu(1-e^2)} \Leftrightarrow \cancel{a}\sqrt{\frac{\cancel{\mu}}{\cancel{a}}}\,.\cos\gamma = \sqrt{\cancel{a}.\cancel{\mu}(1-e^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\gamma = \sqrt{1-e^2}} \quad (37)$$

Aplicando a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\gamma \overset{(41)}{=} 1 - \left(\sqrt{1-e^2}\right)^2 = 1 - (1-e^2) =$$

$$= e^2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = e \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin e} \quad \text{c.q.d}$$

11 Com $X = 0{,}710$ temos os seguintes valores:

$$h = (580 + 30 \times 0{,}710) = 601.3 \text{ km}$$

$$\frac{r v^2}{\mu_\oplus} = 1.4 + 0.2 \times 0{,}710 = 1.542$$

$$\gamma_0 = -(28 + 4 \times 0{,}710)^\circ = -30.84^\circ$$

a) Pelo formulário temos:

$$\boxed{e^2 = \left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu_\oplus} - 1\right)^2 \cdot \cos^2\gamma_0 + \text{sen}^2\gamma_0} \quad (38)$$

Substituindo os valores obtemos o seguinte valor para a excentricidade:

$$e^2 = \left(1.542 - 1\right)^2 \times \cos^2(-30.84^\circ) + \text{sen}^2(-30.84^\circ) \Rightarrow \underline{e = 0.69236}$$

Considerando também o semi-eixo maior, com $r_0 = h_0 + R_\oplus$:

$$\boxed{a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu_\oplus}} = \frac{h_0 + R_\oplus}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu_\oplus}}} \quad (39)$$

Substituindo os valores temos:

$$a = \frac{601.3 \text{ km} + 6378 \text{ km}}{2 - 1.542} \Leftrightarrow \underline{a = 15239 \text{ km}}$$

Pelo formulário, relativamente à anomalia verdadeira:

$$\tan\theta_0 = \frac{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu_\oplus}\right) \cdot \text{sen}(\gamma_0) \cdot \cos(\gamma_0)}{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu_\oplus}\right) \cos^2(\gamma_0) - 1}$$

Substituindo os valores obtemos 2 soluções possíveis:

$$\tan\theta_0 = \frac{1.542 \times \sin(-30.84^\circ) \times \cos(-30.84^\circ)}{1.542 \times \cos^2(-30.84^\circ) - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 = -1.37196342 \vee \theta_0 = -1.37196342 + \pi = 1.769629234 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\theta_0 = -78.610^\circ}_{4^\circ \text{ Quadrante}} \vee \underbrace{\theta_0 = 101.39^\circ}_{2^\circ \text{ Quadrante}}$$

Analisando o flight path angle, como $\gamma_0 < 0$ então θ_0 apenas pode pertencer ao 3º Quadrante ou 4º Quadrante. Deste modo ficamos com a solução de θ_0:

$$\theta_0 = -78.610^\circ$$

b) Com $X = 0.71$ temos: $\Delta v = (675 + 45 \times 0.710) = 706.95 \text{ m/s} =$
$= 0.70695 \text{ km/s}$

Neste caso, os elementos da órbita após o incremento da velocidade são identificados por uma nova óptica. Sabendo que esta alteração ocorreu no apogeu, temos:

$$r_0' = r_A = a(1+e) = 15238.65 \times (1 + 0.6923615) \Rightarrow r_0' = 25789 \text{ Km}$$

$$v_0' = v_A + \Delta v \overset{(36)}{=} \sqrt{2\mu_\oplus \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} + \Delta v =$$

$$= \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{25789.30 \text{ Km}} - \frac{1}{2 \times 15238.65 \text{ Km}}\right)} + 0.70695 \text{ Km/s} =$$

$$\Rightarrow v_0' = 2.8875 \text{ Km/s}$$

Deste modo, segundo (40), podemos obter a excentricidade, tendo em conta que o flight path angle é $\gamma_0 = 0$, uma vez que se encontra no apogeu:

$$e'^2 = \left(\frac{r_0 . v_0^2}{\mu_\oplus} - 1\right)^2 . \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0 \Leftrightarrow$$

$-30.84°$

$$\Leftrightarrow e' = \sqrt{\left(\frac{25\,789 \text{ Km} \times (2.887517 \text{ Km/s})^2}{3.986\times 10^5 \text{ Km}^3/s^2} - 1\right)^2 \times \underbrace{\cos^2(\gamma_0)}_{1} + \underbrace{\sin^2(\gamma_0)}_{0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e' = 0.46055$$

Por (39), o novo semi-eixo maior é:

$$a' = \frac{r_0'}{2 - \frac{r_0' . v_0'^2}{\mu_\oplus}} = \frac{25789.30 \text{ Km}}{2 - \frac{25789.30 \text{ Km} \times 2.887516 \text{ Km/s}}{3.986\times 10^5 \text{ Km}^3/s^2}} \Rightarrow a' = 17657 \text{ Km}$$

Como $r_0' > a$ e $\gamma_0' = 0$ então podemos concluir que o ponto onde se inicia a nova órbita continua a ser o apogeu, isto é, $r_0' = r_A'$.

Para o momento angular (h) temos, novamente recorrendo a (20) e (30):

$$p' = \frac{h'^2}{\mu_\oplus} = a'(1 - e'^2) \Leftrightarrow \boxed{h' = \sqrt{a' \mu_\oplus (1 - e'^2)}} \quad (40)$$

Substituindo os valores,

$$h' = \sqrt{17657.25 \text{ Km} \times 3.986\times 10^5 \text{ Km}^3/s^2 \times (1 - 0.4605502^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h' = 74467 \text{ Km}$$

Deste modo temos o seguinte perigeu da órbita, através de (23):

$$r_p' = 2.a' - r_A' = 2\times 17657.25 \text{ Km} - 2.578930 \text{ Km} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_p' = 9525.2 \text{ Km}$$