

Mecânica Orbital, 2023/24
Trabalho Para Casa #2 (TPC-2)

Data limite de entrega: 16/Out/2023, 23:59

Instruções para o TPC. Leia atentamente e preencha correctamente o solicitado abaixo. Após preenchida, esta folha deve ser entregue em conjunto com as resoluções e respostas solicitadas no trabalho. A classificação só será atribuída se todos os campos estiverem correctamente preenchidos.

Grupo. Indique o número de grupo de TPC, de acordo com o fenix:

Grupo #: 6

Compromisso de honra. Ao entregar este trabalho de casa com a sua identificação incluída, os alunos estão automaticamente a declarar que realizaram o trabalho nas condições do compromisso de honra seguinte:

Declaro por minha honra que a prova foi resolvida recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação, por qualquer meio, com qualquer pessoa fora do grupo e cumprindo todas as regras indicadas da disciplina. Em particular, não foram utilizados quaisquer elementos realizados por outrem com resoluções adaptadas a esta prova.

Identificação e participação. Preencham de modo legível os (i) número de aluno, (ii) nome completo, e (iii) a percentagem de participação de cada aluno no trabalho, de acordo com o indicado mais abaixo

Número	Nome	%
103354	Laurenço Gouveia Faria	4
102939	Mariona Pires	4
103285	Tiago Cruz Clemente	4

A percentagem de participação de cada aluno no trabalho deve ser um número inteiro de 0 a 4, em que 4 é 100% do trabalho devido de cada aluno, 3 é 75% do trabalho devido, etc., até 0, caso o aluno não tenha participado. Este valor deve ser consensual entre alunos. A classificação de cada aluno é a classificação do trabalho multiplicada pela percentagem de participação. Em caso de divergência, o grupo deve apelar o mais depressa possível ao professor responsável pela disciplina. **O preenchimento do campo % é obrigatório, sob pena de anulação da classificação.**

Parâmetro adimensional. No enunciado de alguns problemas será usado um parâmetro adimensional χ obtido a partir dos números de alunos dos membros do grupo. Para um grupo constituído por N alunos, seja n_i o número que se obtém a partir do número do aluno i mantendo apenas os três últimos algarismos. Seja

$$p = \prod_{i=1}^N n_i.$$

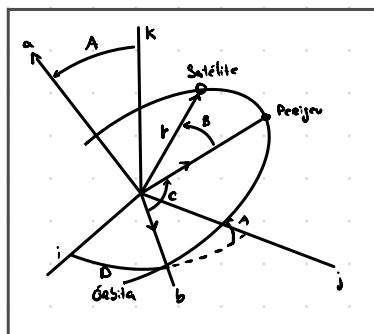
Seja q o número constituído pelos 3 últimos algarismos de p . Então, $\chi = \frac{q}{1000}$.

Exemplo. Um grupo é constituído por 3 alunos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A, com número } 100123 \Rightarrow n_A = 123 \\ \text{B, com número } 101412 \Rightarrow n_B = 421 \\ \text{C, com número } 90321 \Rightarrow n_C = 321 \end{array} \right\} \Rightarrow p = n_A \times n_B \times n_C = 16622343 \Rightarrow q = 343 \Rightarrow \chi = \frac{q}{1000} = 0.343$$

χ do grupo. Calcule o χ do grupo de acordo com a fórmula e exemplo acima e indique-o na caixa:

χ do grupo = 0,710



a)

- A**: i , a inclinação da órbita;
C: ω , o argumento do perigeu;
D: θ , a ascensão reta do nodo ascendente.

b) Os elementos clássicos de órbita (ECO), especificam o movimento dos corpos através da determinação da órbita e sua orientação no espaço. Na figura, apenas encontram-se representados os que especificam a orientação da órbita no espaço, $\{i, \omega, \theta\}$. Deste modo os ECO's que não se encontram representados são os relacionados com o tipo de órbita e localização do satélite nesta, $\{a, e, T_0\}$:

- a**: o semi-eixo maior da seção cônica que constitui a órbita;
e: a excentricidade da seção cônica que constitui a órbita;
T₀: o tempo de passagem no perigeu.

c) Na figura a letra "a" representa o vetor $\vec{h}$, isto é, o momento angular e a respetiva direção.
Por outro lado, a letra "b" representa o nodo ascendente.

d) A anomalia verdadeira encontra-se representada, na figura, através da letra "B", enquanto que a direção da primeira ponta de aries encontra-se representada por " $\vec{\lambda}$ ".

2

Para o valor de $X = 0.910$ temos os seguintes valores:

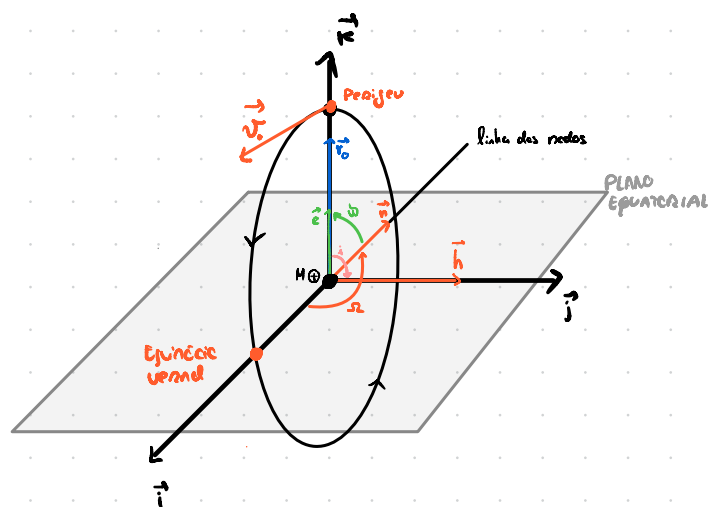
$$h = (400 + 100 \times 0.910) \text{ km} = 471 \text{ km}$$

$$e = (10 + 0.910) / 20 = 0.5355$$

Como o satélite encontra-se a passar no perigeu, então a altitude é a referente ao perigeu, $h_p = 471 \text{ km}$. Pretendemos calcular os elementos clássicos de Órbita, isto é:

$$\{i, \Omega, \omega, a, e, T_0\}$$

De acordo com a descrição do enunciado temos a seguinte representação da órbita:



O momento angular é dado por $\vec{h} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$, logo $\vec{h}$ tem a direção positiva do eixo $\vec{j}$, o que leva à conclusão de $i = \frac{\pi}{2}$.

Recomendo ao enunciado, concluímos que a linha dos nodos coincide com o eixo $\vec{i}$, sendo o sentido de $\vec{n}$ negativo relativamente a esse mesmo eixo. Deste modo temos que $\Omega = \pi$.

O vetor excentricidade, $\vec{e}$, aponta sempre para o perigeu, logo, tendo a direção de $\vec{n}$ podemos observar que $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Do enunciado temos que $T_0 = 12 \text{ h } 00$ de hoje e temos também o valor da excentricidade, calculado através do X do grupo, $e = 0.5355$.

Pela equação de órbita podemos obter o valor para o semi-eixo maior, a :

$$\begin{aligned} (1) \quad r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow a = \frac{r(1+e\cos\theta)}{(1-e^2)} = \frac{r(1+e)}{(1+e)(1-e)} = \frac{h_p + R_\oplus}{1-e} \\ &= \frac{471 \text{ km} + 6378 \text{ km}}{1-0.5355} = 14744.88698 \text{ km} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{a = 14745 \text{ km}} \end{aligned}$$

$\theta = 0^\circ$, uma vez que o satélite se encontra no perigeu.

3

Para o valor de $X = 0.710$ temos os seguintes valores:

$$r_1 = (6600 + 100 \times 0.710) = 6671 \text{ km} = r_A$$

$$r_2 = (11500 + 500 \times 0.710) = 11855 \text{ km} = r_B$$

$$\mu = (3.25 + 0.2 \times 0.710) \times 10^5 = 3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

a)

De acordo com as transferências de Hohmann, o semi-eixo maior, a , é dado por:

$$(2) \quad 2 a_H = r_A + r_B \Rightarrow a_H = \frac{6671 \text{ km} + 11855 \text{ km}}{2} = \underline{9263.0 \text{ km} = a_H}$$

Recorrendo à fórmula da energia total, presente na formulação, temos:

$$(3) \quad \mathcal{E} = - \frac{\mu}{2a} \Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times 9263.0 \text{ km}} = -18.309403 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{E} = -18.309 \text{ km}^2/\text{s}^2}$$

Por último, recorrendo às seguintes expressões da formulação podemos obter o valor para a excentricidade:

$$(4) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (6)$$

$$(5) \quad p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}$$

Novamente como, para o ponto A, a manobra se realiza na perispóide, $\theta = 0^\circ$, logo:

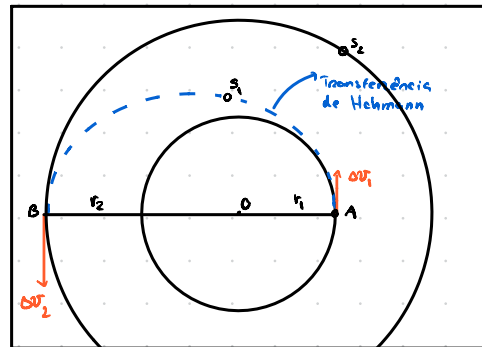
$$r_p = r_1 = \frac{a_H (1 - e^2)}{1 + e \underbrace{\cos \theta}_{=1}} = a_H (1 - e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = 1 - \frac{r_1}{a_H} = 1 - \frac{6671 \text{ km}}{9263.0 \text{ km}} = 0.279822951 \Rightarrow \underline{e = 0.27982}$$

b)

ii) As transferências de Hohmann permitem a transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares arbitrárias, como é o caso desta pergunta. Nestas são necessários 2 impulsos para que a transferência possa ser efetuada - nesta pergunta, o 1º impulso no ponto A e o 2º no ponto B.

As manobras necessárias para isto são realizadas na apocapside e na pericapside da órbita de transferência, sendo que as velocidades que precedem e sucedem cada impulso são colineares. Para este problema e de acordo com as regras das transferências de Hohmann temos o seguinte desenho:



De acordo com as fórmulas da energia temos:

$$(7) \quad T(r) = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{2r}$$

ENERGIA CINÉTICA

$$(8) \quad V(r) = -\frac{\mu}{r}$$

ENERGIA POTENCIAL

Através do balanço de energia e da fórmula (3) podemos obter a seguinte expressão para a velocidade:

$$\underbrace{G = T(r) + V(r)}_{\text{BALANÇO DE ENERGIA}} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow v^2 = 2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) \Rightarrow v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (9)$$

EQUAÇÃO VIS-VIVA

Para órbitas circulares temos a seguinte fórmula para a aceleração:

$$(10) \quad a_c = \frac{v^2}{r}$$

Onde v é a velocidade orbital e r a distância ao corpo central.

Considerando também a segunda lei de Newton e a fórmula da gravitação universal:

$$(11) \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

2ª LEI DE NEWTON

$$(12) \quad \vec{F}(r) = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \vec{e}_r$$

FÓRMULA DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Ao igualarmos (11) a (12) e substituindo a aceleração por (10) podemos obter uma equação que nos permita obter a velocidade para órbitas circulares onde o parâmetro gravitacional é dado por $\mu = m \cdot G$:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \stackrel{(3)}{=} m_2 \vec{a} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \stackrel{(1)}{=} m_2 \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \stackrel{(2)}{=} \\ \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m_1 \cdot G}{r}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}} \quad (13) \text{ VELOCIDADE ORBITAL}$$

Deste modo, recorrendo à equação (13) e à equação vis-viva (9) podemos calcular as variações de velocidade para esta transferência de Hohmann:

CIRCULAR $r_1 \rightarrow$ Elipse H:

$$\Delta v_1 = v_{\text{elipse H}} - v_{c, r_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a_H} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \\ = \sqrt{2 \times 3.342 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} \times \left(\frac{1}{6671 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 9263 \text{ km}} \right) - \sqrt{\frac{3.342 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{6671 \text{ km}}} = \\ = 0.936208774 \text{ km/s}$$

Elipse H $\rightarrow$ CIRCULAR r_2 :

$$\Delta v_2 = v_{\text{elipse H}} - v_{c, r_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a_H} \right)} = \\ = \sqrt{\frac{3.342 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{11855 \text{ km}}} - \sqrt{2 \times 3.342 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} \times \left(\frac{1}{11855 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 9263 \text{ km}} \right) = \\ = 0.809673456 \text{ km/s}$$

ii) A variação total da velocidade é entendida como uma medida para o gasto total de propelente, logo para a calcular somam-se os módulos da variação da velocidade no 1º e no segundo impulsos, sendo que neste caso não haveria diferença, uma vez que estes valores são ambos positivos.

$$v_{\text{total}} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 0.936208774 \text{ km/s} + 0.809673456 \text{ km/s} = 1.74588223 \text{ km/s} \\ \Rightarrow \underline{v_{\text{tot}} = 1.7459 \text{ km/s}}$$

c) Pelo formulário temos a seguinte fórmula para o período, no caso das órbitas elípticas:

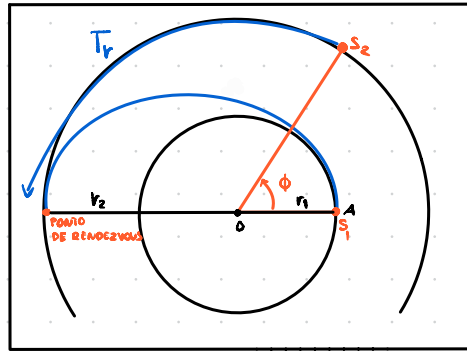
$$(14) \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2}}$$

Numa transferência de Hohman, a trajetória de passagem entre A e B tem o formato de metade de uma elipse. Deste modo, para calcular o tempo necessário para se realizar a manobra, podemos utilizar a fórmula (13) e aplicá-la a uma elipse, dividindo o resultado por 2:

$$T_{\text{transf. Heilmann}} = \frac{T_e}{2} = \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{a_H^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi a_H^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi \times (9263 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} =$$

$$= 4808.94098 \text{ s} = 80.14901633 \text{ min} \Rightarrow \underline{T_{t.h} = 4808.9 \text{ s} = 80.149 \text{ min}}$$

De acordo com o enunciado temos a seguinte imagem onde se representa o ângulo pedido e a posição inicial de S_1 , com a posição S_2 arbitrária:



$$T_r = \frac{T_e}{2}$$

ϕ : ângulo geocêntrico entre S_1 e S_2 .

Em relação à elipse, sendo o foco o ponto O, podemos concluir que S_1 se encontra inicialmente na periélide, visto que $OA < OB$. Assim, o ângulo inicial vai ser medido a partir da linha dos eóides.

A velocidade angular é a variação do ângulo em função do tempo, isto é, $n = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$ (utilizando a nomenclatura de n para a velocidade angular e ϕ para o ângulo, pois estão em conformidade com a imagem anterior).

No caso da trajetória de S_2 , como este está numa órbita circular, podemos definir a sua velocidade angular através da seguinte fórmula presente no formulário, onde neste caso $a = r_2$:

$$(15) \quad n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}}$$

Deste modo, com estas duas fórmulas podemos obter uma expressão que relacione o ângulo ϕ com o tempo da transferência de Heilmann (tempo necessário para que ocorra o Rendezvous):

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \\ n &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}} \end{aligned} \right\} \Delta \phi = \Delta t \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}} \Leftrightarrow \Delta \phi = T_{t.h} \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}} \quad (16)$$

Assim temos a variação do ângulo ϕ :

$$\Delta \phi = 4808.94098 \text{ s} \times \sqrt{\frac{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(11855 \text{ km})^3}} = 2.169826612 \text{ rad}$$

Por último, como no rendezvous $\phi = \pi$, o ângulo planetocêntrico é dado por:

$$\text{ângulo planetocêntrico} = \pi - \Delta \phi = \pi - 2.169826612 \text{ rad} = 0.971766041 \text{ rad} = 55.67809285^\circ$$

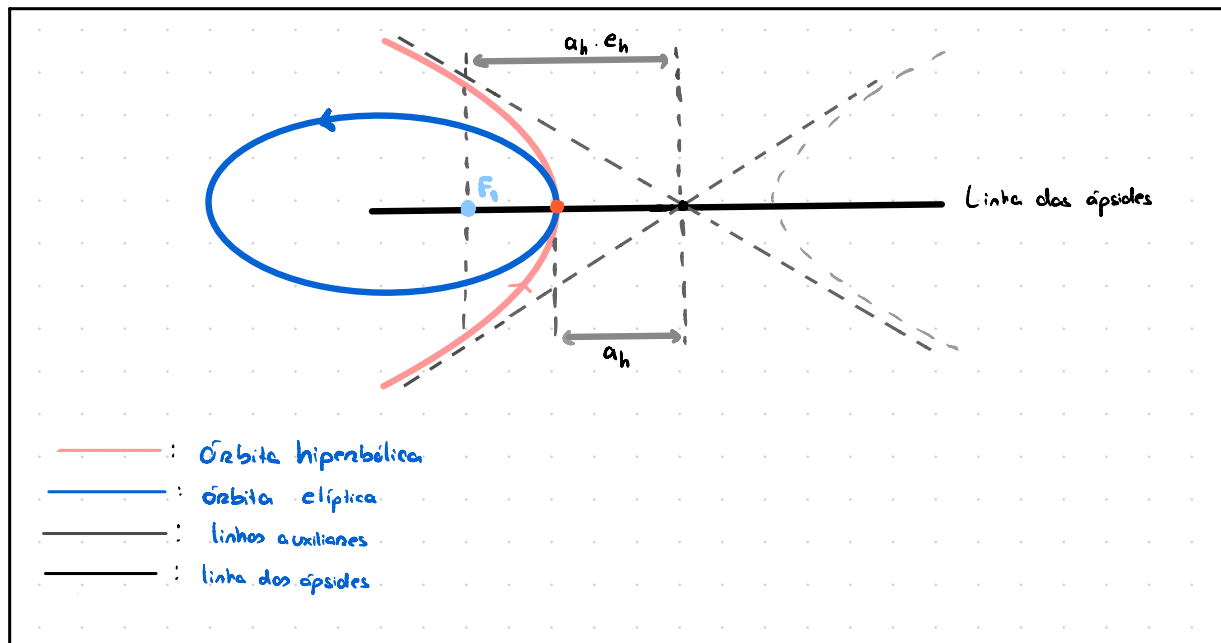
$$\Rightarrow \underline{\phi_{\text{inicial}} = 55.678^\circ}$$

4

Para o valor de $X = 0.710$ temos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_1 &= (17000 + 200 \times 0.710) = 17142 \text{ km} \\ e_1 &= 1.3000 + 0.1 \times 0.710 = 1.371 \\ e_2 &= 0.35 + 0.1 \times 0.71 = 0.421 \rightarrow \text{órbita elíptica} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{trajetória hiperbólica}$$

De acordo com os dados de enunciado e assumindo o sentido direto obtemos a seguinte representação das órbitas:



As órbitas hiperbólicas partilham muitas características com as órbitas elípticas, sendo que nas hiperbólicas a excentricidade está restringida à condição $e > 1$. Considerando as possibilidades $a_H > 0$ ou $a_H < 0$ dependendo do referencial temos as seguintes fórmulas para p e r_p para esta órbita:

$$(17) \quad p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu} = (-a_1)(e^2 - 1) = |a_1|(e^2 - 1) = a_1(e^2 - 1) = p \quad (18)$$

$$(19) \quad r = \frac{p}{1 + e_1 \cos \theta} \Rightarrow r_p = \frac{a_1(e_1^2 - 1)}{(1 + e_1)} = \frac{a_1(e_1 - 1)(e_1 + 1)}{(e_1 + 1)} \Rightarrow r_{p_h} = a_1(e_1 - 1) \quad (20)$$

↑ Do formulário
↓ penicípide $\Rightarrow \theta = 0$

Da qual podemos obter r_p :

$$r_p = a_1(e_1 - 1) = 17142 \text{ km} \times (1.371 - 1) = 6359.682 \text{ km}$$

Para a órbita elíptica temos as seguintes fórmulas do formulário (18) e (19):

$$\left. \begin{aligned} p &= a_2(1 - e_2^2) \\ r &= \frac{p}{1 + e_2 \cos \theta} \end{aligned} \right\} R_p = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{(1 + e_2)} \Rightarrow \boxed{r_{p_{\text{elipse}}} = a_2(1 - e_2)} \quad (21)$$

$\theta = 0$ pois o ponto em estudo é a periapside

Ao igualarmos (20) a (21), visto que as duas órbitas são tangentes na periapside (e por isso $r_{p_{\text{elipse}}} = r_{p_{\text{hiperbóide}}}$), podemos calcular o semi-eixo maior, a , da órbita elíptica:

$$a_1(e_1 - 1) = a_2(1 - e_2) \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{-a_1(1 - e_1)}{(1 - e_2)}} \quad (22)$$

Logo,

$$a_2 = \frac{-a_1(1 - e_1)}{(1 - e_2)} = \frac{-13142(1 - 1.371)}{(1 - 0.421)} = 10983.90674 \text{ km}$$

Pela equação Vis-Viva, (9), podemos agora calcular as velocidades para ambas as órbitas:

VELOCIDADE P/ ÓRBITA ELÍPTICA

$$v_2 = \sqrt{2\mu_{\text{Vênus}} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a_2} \right)} = \sqrt{2 \times 3.2486 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{6359.682 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 10983.90674 \text{ km}} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = 8.51976192 \text{ km/s}$$

VELOCIDADE P/ ÓRBITA HIPERBÓLICA

hiperbólica

$$v_1 = \sqrt{2\mu_{\text{Vênus}} \left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{2a_1} \right)} = \sqrt{2 \times 3.2486 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{6359.682 \text{ km}} + \frac{1}{2 \times 13142 \text{ km}} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = 11.00515584 \text{ km/s}$$

Deste modo obtemos o seguinte valor para a variação da velocidade:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 8.51976192 \text{ km/s} - 11.00515584 \text{ km/s} = -2.48539392 \text{ km/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta v = -2.4854 \text{ km/s}} < 0$$

Este resultado é expectável, visto que o satélite passa de uma órbita hiperbólica, onde (de acordo com as aulas teóricas) $E > 0$, para uma órbita elíptica na qual $E < 0$. Deste modo $\Delta E < 0$ o que leva à conclusão observada de que $\Delta v < 0$. Isto, por sua vez, deve-se ao facto de no ponto onde ocorre a transição termos que os parâmetros do coeficiente gravitacional, μ , e r_p não se alteram e consequentemente, por (8), temos que a energia potencial permanece constante sendo por isso a variação da energia total igual à variação da energia cinética.

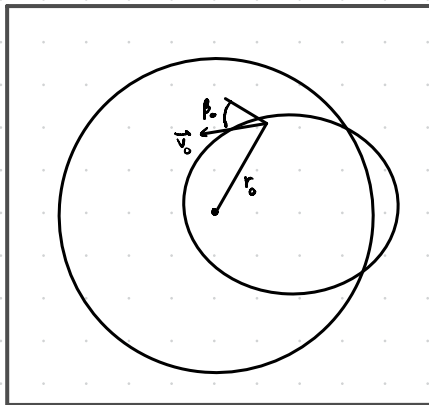
5

Para o valor de $X = 0.710$ temos os seguintes valores:

$$h = r_0 - R_{\oplus} = (2 + 0.1 \times 0.710) R_{\oplus} = 2.071 R_{\oplus} \text{ km}$$

$$v_0 = (0.6500 - 0.05 \pi) \sqrt{\mu_{\oplus} / R_{\oplus}} = 0.6145 \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{6378 \text{ km}}} = 4.857896715 \text{ km/s}$$

$$\beta_0 = -(35 + 4 \times 0.710)^\circ = -37.84^\circ$$



a) Começando por calcular a excentricidade, podemos recorrer à seguinte fórmula do formulário:

$$(23) \quad e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0$$

Na qual " r_0 " e " v_0 " são as velocidade e raio para um determinado ponto, " e " a excentricidade que pretendemos calcular e " γ_0 " o flight path angle.

Substituindo os valores da enunciado em (22) obtemos o seguinte valor para e :

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\left(\frac{(h + R_{\oplus}) v_0^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{(2.071 + 1) \times 6378 \text{ km} \times (4.857896715 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} - 1 \right)^2 \cos^2(-37.84^\circ) + \sin^2(-37.84^\circ)} = \\ &= 0.626279284 \Rightarrow \underline{e = 0.62628} \end{aligned}$$

Pela fórmula temos a seguinte expressão que permite calcular o valor do semi-eixo maior, a , da elipse:

$$(24) \quad \frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu}}$$

Substituindo os valores da enunciado na expressão (24), obtemos o valor de " a " onde, novamente, $r_0 = h + R_{\oplus}$:

$$a = \frac{h + R_{\oplus}}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} = \frac{(2.071 + 1) \times 6378 \text{ km}}{2 - \frac{(2.071 + 1) \times 6378 \text{ km} \times (4.857896715 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} =$$

$$= 23307.70513 \text{ km} \Rightarrow \underline{a = 23308 \text{ km}}$$

Com este parâmetro podemos obter as valones para o perigeu e para o apogeu considerando $\theta_p = 0 \text{ rad}$, $\theta_a = \pi \text{ rad}$ e recorrendo às fórmulas (13) e (14):

$$r_p = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e)} = a(1-e) = 23307.70513 \text{ km} \times (1 - 0.626279284) =$$

$$= 8710.572264 \text{ km} \Rightarrow \underline{r_p = 8710.6 \text{ km}}$$

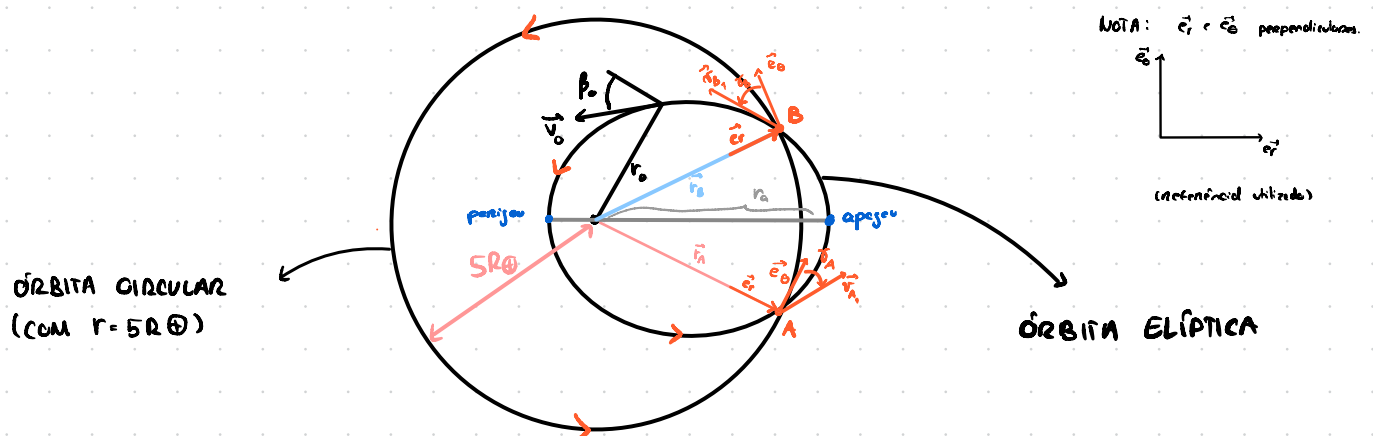
$$r_a = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e)} = a(1+e) = 23307.70513 \text{ km} \times (1 + 0.626279284) =$$

$$= 37904.83808 \text{ km} \Rightarrow \underline{r_a = 37905 \text{ km}}$$

Por último, apenas nos falta calcular a energia da órbita de transferência, cujo valor podemos obter através da fórmula (3):

$$G = \frac{-\mu_{\oplus}}{2a} = \frac{-3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times 23307.70513 \text{ km}} = 8.550820364 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \underline{G = -8.5508 \text{ km}^2/\text{s}^2}$$

b) De acordo com o enunciado e considerando o sentido direto para ambas as órbitas, obtemos seguinte esquema das órbitas, velocidades, alturas, grandezas e representação das duas possibilidades para ser esta transição ocorrer (impulso em A ou impulso em B, pontos onde as órbitas se intersectam):



Nesta imagem temos representado, em cada ponto, $\vec{e}_\theta$, cuja direção é tangente à circunferência, e também o vetor posição $\vec{r}$, que por sua vez é perpendicular a $\vec{e}_\theta$.

Como as transições no ponto A e B ocorrem para a mesma órbita circular, temos que $|\vec{r}_A| = |\vec{r}_B| = 5R_\oplus$. Assim, reescrevendo a expressão (13) para velocidades de órbitas circulares, podemos concluir que ambas as velocidades em A e em B têm o mesmo módulo (velocidades finais). Analogamente, sendo as orbitais iniciais a mesma e não havendo alteração de parâmetros a, r e μ temos que as velocidades iniciais nestes pontos também são iguais em módulo, pela expressão (9):

$$\text{VELOCIDADES INICIAIS} \quad v_{A_1} = v_{B_1} \stackrel{(9)}{=} \sqrt{2\mu_\oplus \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{5 \times 6378 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 23307.70517 \text{ km}} \right)} = 2.810123019 \text{ km/s}$$

$$\text{VELOCIDADES FINAL} \quad v_{A_2} = v_{B_2} \stackrel{(15)}{=} \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_c}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{5 \times 6378 \text{ km}}} = 3.535423038 \text{ km/s}$$

De acordo com a imagem apresentada no início da alínea, temos a seguinte representação vetorial destas velocidades em A e em B:

$$\text{VELOCIDADES EM (A)} \quad \left[\begin{array}{l} \vec{v}_{A_1} = (v_{A_1} \cdot \sin \vartheta_A) \vec{e}_r + (v_{A_1} \cdot \cos \vartheta_A) \vec{e}_\theta \\ \vec{v}_{A_2} = v_{A_2} \vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

$$\text{VELOCIDADES EM (B)} \quad \left[\begin{array}{l} \vec{v}_{B_1} = (-v_{B_1} \cdot \sin \vartheta_B) \vec{e}_r + (v_{B_1} \cdot \cos \vartheta_B) \vec{e}_\theta \\ \vec{v}_{B_2} = v_{B_2} \vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

Como $|\vec{v}_{A_1}| = |\vec{v}_{B_1}|$ e $|\vec{v}_{A_2}| = |\vec{v}_{B_2}|$, a partir destas expressões podemos concluir que as componentes das velocidades iniciais $\vec{e}_\theta$ são iguais. Por simetria também podemos observar que o módulo das componentes $\vec{e}_r$ destas velocidades também são iguais. Deste modo, igualando os módulos temos $\vartheta_A = \vartheta_B$:

$$\begin{aligned} | -v_{A_1} \sin \vartheta_A | &= | v_{B_1} \sin \vartheta_B | \Leftrightarrow \\ (1) \quad v_{A_1} \sin \vartheta_A &= v_{B_1} \sin \vartheta_B \Rightarrow \underline{\vartheta_A = \vartheta_B} \end{aligned}$$

Para calcular estes ângulos necessitamos primeiramente de calcular o momento angular, h , através da fórmula (17):

$$p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{a \mu (1-e^2)}} \quad (25)$$

Como mencionado no início do projeto também temos $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$, o que neste caso se traduz em:

$$\vec{h} = (r \vec{e}_r) \times (v \sin \theta \vec{e}_r + v \cos \theta \vec{e}_\theta) = r \cdot v \cos \theta \vec{e}_\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h = r v \cos \theta} \quad (26)$$

Iguando estas duas expressões para o momento angular podemos finalmente obter o valor para $\theta_A = \theta_B$:

$$\left. \begin{aligned} h &= \sqrt{\alpha \mu (1 - e^2)} \\ h &= r v \cos \theta \end{aligned} \right\} r v \cos(\theta) = \sqrt{\alpha \mu (1 - e^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{\alpha \mu (1 - e^2)}}{r \cdot v} \right) \Rightarrow \overset{\text{inicial}}{\theta_{A_1} = \theta_{B_1}} = \frac{\sqrt{\alpha \mu_\oplus (1 - e^2)}}{r_c \cdot v_{A_1}} =$$

$$= \arccos \left(\frac{\sqrt{23307.70517 \text{ km} \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times (1 - 0.626279284)}}{5 \times 6378 \text{ km} \times 2.810123019 \text{ km/s}} \right) = 0.576248234 \text{ rad} = 33.01659181^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{A_1} = \theta_{B_1} = 33.01659181^\circ$$

Finalmente, com este valor é nos possível obter o valor concreto dos módulos da variação das velocidades em A e em B:

VELOCIDADES EM A:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A_1} &= (v_{A_1} \cdot \sin \theta_A) \vec{e}_r + (v_{A_1} \cos \theta_A) \vec{e}_\theta = \\ &= (2.810123019 \text{ km/s} \times \sin(33.01659181^\circ)) \vec{e}_r + (2.810123019 \text{ km/s} \times \cos(33.01659181^\circ)) \vec{e}_\theta = \\ &= 1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{A_2} = v_{A_2} \vec{e}_\theta = 3.535423038 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s})$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_A &= \vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1} = 3.535423038 \vec{e}_\theta - (1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta) = \\ &= -1.531185102 \vec{e}_r + 1.179098874 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \Rightarrow \underline{\Delta \vec{v}_A = -1.5312 \vec{e}_r + 1.1791 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{|\Delta \vec{v}_A| = 1.9326 \text{ km/s} \quad (\text{módulo})}$$

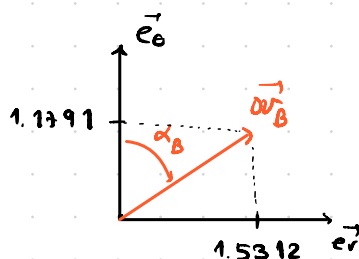
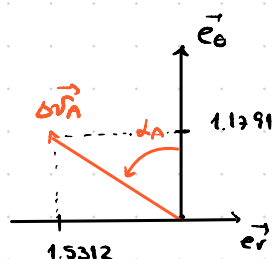
VELOCIDADES EM B:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{B_1} &= (-v_{B_1} \cdot \sin \theta_B) \vec{e}_r + (v_{B_1} \cos \theta_B) \vec{e}_\theta = \\ &= (-2.810123019 \text{ km/s} \times \sin(33.01659181^\circ)) \vec{e}_r + (2.810123019 \text{ km/s} \times \cos(33.01659181^\circ)) \vec{e}_\theta = \\ &= -1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{B_2} = v_{B_2} \vec{e}_\theta = 3.535423038 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s})$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_B &= \vec{v}_{B_2} - \vec{v}_{B_1} = 3.535423038 \vec{e}_\theta - (-1.591185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta) = \\ &= 1.591185102 \vec{e}_r + 1.179098874 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \Rightarrow \underline{\Delta \vec{v}_B = 1.5312 \vec{e}_r + 1.1791 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{|\Delta \vec{v}_B| = 1.9326 \text{ km/s} \quad (\text{módulo})}$$



$$\begin{aligned} \alpha_B = \alpha_A &= \arctan\left(\frac{1.5312}{1.1791}\right) = \\ &= 52.40194358^\circ \\ \Rightarrow \underline{\alpha_B = \alpha_A = 52.402^\circ} \end{aligned}$$

Deste modo, segundo o referencial escolhido, os vetores $\Delta \vec{v}_A$ e $\Delta \vec{v}_B$ fazem um ângulo de 52.402° com o eixo $\vec{e}_\theta$, têm sentido positivo em relação a $\vec{e}_\theta$ e sentido negativo e positivo em relação a $\vec{e}_r$, respectivamente, como demonstrado na figura.

c) Como visto anteriormente, a velocidade inicial do satélite quando este se encontra na órbita circular de raio $r_c = 5 R_\oplus$ é dada pela expressão (13) em módulo e direção relativamente a $\vec{e}_\theta$:

$$(26) \quad \boxed{\vec{v}_i = \sqrt{\frac{M_\oplus}{r_c}} \vec{e}_\theta}$$

Recorrendo à equação vis-viva (9) e considerando $a \rightarrow \infty$, podemos obter a seguinte expressão para a velocidade de escape:

$$v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}} \quad (27)$$

Deste modo a variação da velocidade mínima necessária para o satélite escapar da atração terrestre é dada por:

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{v}_{\min}| &= v_e - v_i = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_c}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_c}} = (\sqrt{2} - 1) \times \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{5 \times 6378 \text{ km}}} = \\ &= \underline{1.4644 \text{ km/s} = |\Delta \vec{v}_{\min}|} \end{aligned}$$

Sendo que $|\Delta \vec{v}|$ é mínima quando $\vec{v}_e$ e $\vec{v}_i$ têm a mesma direção.

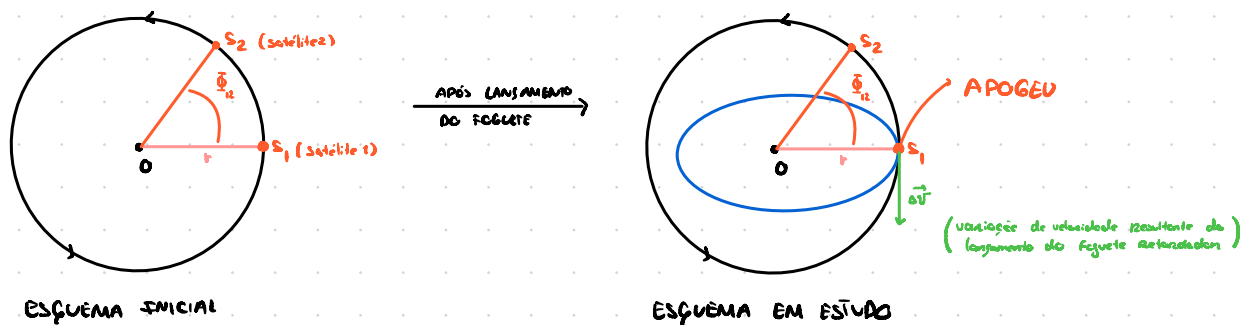
6

Para o valor de $X = 0.910$ temos os seguintes valores:

$$r = (650 + 100 \times 0.910) = 721 \text{ km}$$

$$\Phi_{12} = (10 + 10 \times 0.910)^\circ = 19.1^\circ$$

De acordo com as informações fornecidas pelo enunciado, e considerando o sentido direto, temos a seguinte imagem para o problema:



Neste problema pretendemos saber o valor de $|\Delta v|$ de modo a que os dois satélites se encontrem ao fim de do satélite S_1 ter completado uma revolução à sua órbita sub-circular. Para isto, é necessário calcular a velocidade de S_1 na nova órbita elíptica, sendo o seu período dado por:

$$(28) \quad T_e = T_c - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ} T_c$$

Onde T_e é o período de S_1 na órbita elíptica e T_c o período de S_2 na órbita circular.

Para órbitas circulares $r=a$, logo, substituindo T_e e T_c pela expressão (14) podemos obter uma expressão que nos permita calcular o semi-eixo maior, a , para a órbita elíptica:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} = \left(1 - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ}\right) \times \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2} \quad (\Rightarrow) \quad a = \left[\frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} \left(1 - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ}\right) \times \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2} \right]^{2/3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \left(1 - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ}\right)^{2/3} \cdot r \quad (29) = \left(1 - \frac{19.1^\circ}{360^\circ}\right)^{2/3} \times (721 \text{ km} + 6378 \text{ km}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = 6872.380007 \text{ km}$$

Para obtermos uma expressão para a velocidade no apogeu podemos manipular a fórmula (24) da seguinte maneira:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{r_0}{a} = 2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu} \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0} \left(2 - \frac{r_0}{a}\right)} \quad (30)$$

Substituindo pelos valores respectivos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{r_c} \left(2 - \frac{r_0}{a} \right)} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(721+6378) \text{ km}} \left(2 - \frac{(721+6378) \text{ km}}{6872.380007 \text{ km}} \right)} = 7.368664842 \text{ km/s}$$

Deste modo, o Δv associado à mudança do satélite S_1 da órbita circular para a órbita sub-circular é dado por:

$$\Delta v = v_0 - v_c \stackrel{(13)}{=} v_0 - \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{r_c}} = 7.368664842 \text{ km/s} - \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(721+6378) \text{ km}}} = -0.340919596 \text{ km/s} \Rightarrow \underline{\Delta v = -0.124582341}$$

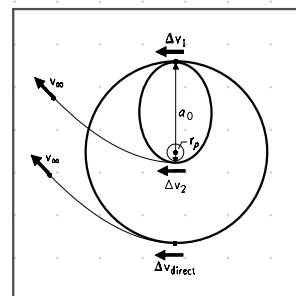
7

Para o valor de $X = 0.710$ temos os seguintes valores:

$$a_0 = (4 + 2 \times 0.710) 6378 \text{ km} = 34568.96 \text{ km}$$

$$v_{\infty} = (3 + 0.710) = 3.71 \text{ km/s}$$

$$r_p = 6378 \text{ km} + (400 + 100 \times 0.710) \text{ km} = 6849 \text{ km}$$



a) No primeiro método a sonda encontra-se apenas numa órbita circular de raio $r = a_0$. Deste modo a sua velocidade antes da variação Δv_{direct} é dada por (13):

$$v_i = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{a_0}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{34568.96 \text{ km}}} = 3.39567992 \text{ km/s}$$

Por outra lado, após esta variação Δv_{direct} , podemos calcular a velocidade da sonda no instante imediatamente após ocorrer a variação Δv_{direct} através de um balanço de energia entre as energias desse ponto e de um ponto para v_{∞} . Deste modo, recorrendo às expressões (7) e (8) para as energias cinética e potencial (tendo em conta que no infinito a energia potencial é nula) temos:

$$E_{\infty} = E_f \stackrel{\text{instante imediatamente após a variação}}{=} T(r_{\infty}) + v_{r_{\infty}}^2 = T(r_f) + v_{r_f}^2 \Leftrightarrow \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{v_f^2}{2} - \frac{\mu}{r} \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2\mu}{r}}} \quad (31)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2M_{\oplus}}{a_0}} = \sqrt{(3.71 \text{ km/s})^2 + \frac{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{34568.96 \text{ km}}} = 6.068392228 \text{ km/s}$$

Com estes valores podemos finalmente obter o valor para Δv_{direct} :

$$\Delta v_{direct} = v_j - v_i = 6.068392228 \text{ km/s} - 3.39567992 \text{ km/s} = \\ = 2.672712308 \text{ km/s} \Rightarrow \underline{\Delta v_{direct} = 2.6727 \text{ km/s}}$$

b) De acordo com o enunciado podemos concluir que, para a elipse representada, o raio da apópside é $r_a = a_0$ e o raio do perigeu dado pelo valor anteriormente calculado.

Para esta análise vamos usar a seguinte nomenclatura:

v_{1i} : Velocidade imediatamente antes da variação Δv_1 ;

v_{1f} : Velocidade imediatamente após da variação Δv_1 ;

v_{2i} : Velocidade imediatamente antes da variação Δv_2 ;

v_{2f} : Velocidade imediatamente após da variação Δv_2 ;

Para o primeiro impulso podemos calcular v_{1i} e v_{1f} recorrendo à expressão para a velocidade em órbitas circulares (13) e à velocidade de acordo com a equação vis-viva (9), respetivamente:

$$v_{1i} = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a_0}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{34568.76 \text{ km}}} = 3.39567992 \text{ km/s}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{a_0 + r_p}{2} = \frac{34568.76 \text{ km} + 6849 \text{ km}}{2} = 20708.88 \text{ km}$$

↗ Cálculo semi-uma
maior da elipse

$$v_{1f} = \sqrt{\mu_\oplus \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \left(\frac{1}{34568.76 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 20708.88 \text{ km}} \right)} = \\ = 1.952819143 \text{ km/s}$$

Deste modo podemos, finalmente, calcular Δv_1 :

$$\Delta v_1 = v_{1f} - v_{1i} = 1.952819143 \text{ km/s} - 3.39567992 \text{ km/s} = -1.442860777 \text{ km/s} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\Delta v_1 = -1.4429 \text{ km/s}}$$

Para o segundo impulso podemos calcular v_{2i} e v_{2f} recorrendo, novamente, à expressão (9) e a um balanço de energia como na alínea a), respetivamente:

$$v_{2i} = \sqrt{\mu_\oplus \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \left(\frac{1}{6849 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 20708.88 \text{ km}} \right)} = \\ = 9.856407693 \text{ km/s}$$

$$G_{\infty} = \overset{\text{instante imediatamente após } \vec{v}_2}{G_{2f}} \Leftrightarrow T(r_{\infty}) + V(r_{\infty}) = T(r_{2f}) + V(r_{2f}) \Leftrightarrow \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{v_{2f}^2}{2} - \frac{M_{\oplus}}{r_p} \Rightarrow v_{2f} = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2M_{\oplus}}{r_p}} = 0$$

$$\Rightarrow v_{2f} = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2M_{\oplus}}{r_p}} = \sqrt{(3.71 \text{ km/s})^2 + \frac{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{6849 \text{ km}}} = 11.40879723 \text{ km/s}$$

Deste modo temos Δv_2 :

$$\Delta v_2 = v_{2f} - v_{2i} = 11.40879723 \text{ km/s} - 9.856407693 \text{ km/s} = 1.552389537 \text{ km/s} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta v_2 = 1.5524 \text{ km/s}}$$

8

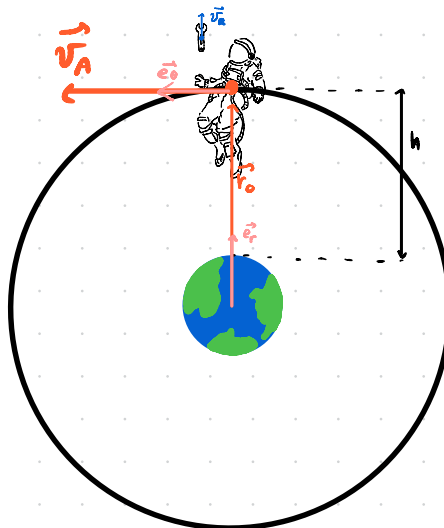
Para o valor de $X = 0.710$ temos:

$$h = (400 + 30 \times 0.710) = 421.3 \text{ km}$$

$$v_{A_n} = (1.8 + 0.4 \times 0.710) = 2.084 \text{ km/s}$$

$$v_{A_b} = (3.5 + 0.710) = 4.21 \text{ km/s}$$

a) De acordo com os dados da enunciado temos a seguinte representação do exercício, onde h é a altitude a que o astronauta se encontra, $\vec{v}_A$ a velocidade do astronauta e $\vec{v}_R$ a velocidade relativa da ferramenta lançada para cima:

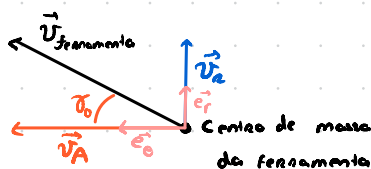


Como o astronauta encontra-se com uma velocidade para uma órbita circular, podemos calculá-la da seguinte maneira recorrendo novamente a (13):

$$v_A = \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{r_0}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(421.3 + 6378) \text{ km}}} = 3.656610337 \text{ km/s}$$

$\downarrow$
 $r_0 = h + R_{\oplus}$

Neste caso, a nova velocidade da ferramenta encontra-se representada vetorialmente da seguinte maneira:



De onde temos:

$$\vec{v}_f = v_A \vec{e}_\theta + v_r \vec{e}_r \quad (\text{km/s})$$

$$|\vec{v}_f| = \sqrt{v_A^2 + v_r^2} = \sqrt{(7.656610337 \text{ km/s})^2 + (2.084 \text{ km/s})^2} = 7.935158338 \text{ km/s}$$

Por este esquema podemos definir θ e calculá-lo da seguinte forma:

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{v_r}{v_A}\right) = \arctan\left(\frac{2.084 \text{ km/s}}{7.656610337 \text{ km/s}}\right) = 0.265745487 \text{ rad} = 15.22609487^\circ$$

i)

Para calcularmos a excentricidade desta nova órbita podemos recorrer à seguinte fórmula do formulário (23):

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} = \sqrt{\left(\frac{(h + R\theta) \cdot v_f^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times 7.935158338^2 \text{ km/s}}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} - 1\right)^2 \cos^2 (15.22609487^\circ) + \sin^2 (15.22609487^\circ)} = \\ &= 0.272183108 \Rightarrow \underline{e = 0.27218} \end{aligned}$$

Para o cálculo da anomalia verdadeira (θ) vamos recorrer à seguinte fórmula do formulário:

$$(32) \quad \tan \theta_0 = \frac{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}\right) \sin(\theta_0) \cdot \cos(\theta_0)}{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}\right) \cos^2(\theta_0) - 1}$$

Substituindo pelos valores respectivos obtemos:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\left[\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (7.935158338 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}\right] \sin(15.22609487^\circ) \times \cos(15.22609487^\circ)}{\left[\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (7.935158338 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}\right] \cos^2(15.22609487^\circ) - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 10^\circ \vee \theta = 270^\circ$$

Como $\theta_0 > 0$, então a anomalia pertence ao 1º quadrante ou ao 2º quadrante, o que leva a:

$$\underline{\theta = 90^\circ}$$

Para calcularmos os restantes valores do semi-eixo maior (a), energia ($\mathcal{E}$) e período (T), podemos recorrer às expressões (22), (3) e (14), respetivamente:

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} = \frac{(421.3 + 6378) \text{ km}}{2 - \frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (7.935158338 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} =$$

$$= 7343.3199 \text{ km} \Rightarrow \underline{a = 7343.3 \text{ km}}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{-3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times (7343.3199 \text{ km})} = -27.14031293 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \underline{\mathcal{E} = -27.140 \text{ km}^2/\text{s}^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2} = \frac{2\pi \times (7343.3199 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} = 6262.531064 \text{ s} = 104.3755177 \text{ min}$$

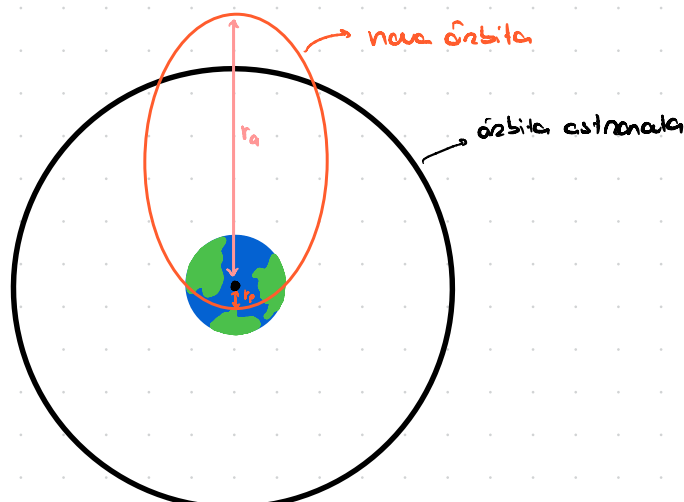
$$\Rightarrow \underline{T = 104.38 \text{ min}}$$

ii) Podemos determinar o tipo de órbita ao analisar o valor da excentricidade. Como $e < 1$, podemos concluir que a nova órbita é uma órbita elíptica. Com isto temos o seguinte raio do perigeu (onde $\theta = 0^\circ$):

$$(1): r_p = a(1 - e) = 7343.3199 \text{ km} (1 - 0.272183108) = 5344.592267 \Rightarrow$$

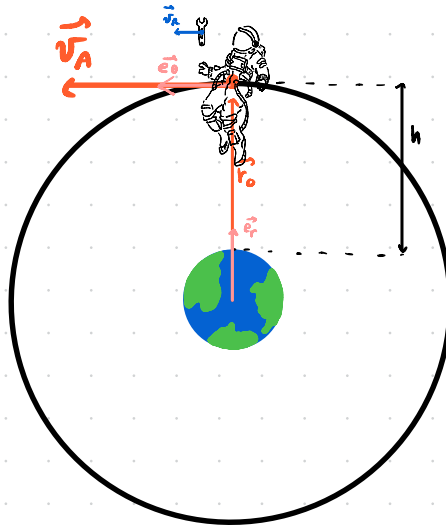
$$\Rightarrow \underline{r_p = 5344.6 \text{ km}}$$

Com estes resultados temos o seguinte esquema da nova órbita:



Deste modo, como o raio da perigeu é inferior a $R_{\oplus}$, a ferramenta vai colidir com a Terra, visto que a trajetória da órbita em que se encontra intersecta a Terra. Assim, a nova órbita não existirá muito tempo (definitivamente inferior a metade do período, isto é, 3131.265532 s).

b) De acordo com os dados do enunciado temos a seguinte representação do exercício, onde h é a altitude a que o astronauta se encontra, $\vec{v}_A$ a velocidade do astronauta e $\vec{v}_R$ a velocidade relativa da ferramenta lançada para cima:



Nesta alínea, a velocidade da ferramenta pode ser calculada pela soma da velocidade relativa da ferramenta e da velocidade do astronauta (já calculada na alínea a):

$$\vec{v}_f = v_{R_b} \vec{e}_\theta + v_A \vec{e}_\theta = (v_{R_b} + v_A) \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s})$$

$$|\vec{v}_f| = \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{v_A} + v_{R_b} = 7.656610337 \text{ km/s} + 4.21 \text{ km/s} = 11.86661034 \text{ km/s}$$

i)

Para calcularmos a excentricidade desta nova órbita podemos recorrer à seguinte fórmula do formulário (23), na qual $\gamma_0 = 0$ pois os vetores velocidade do astronauta e da ferramenta são colineares:

$$e = \sqrt{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0} = \sqrt{\left(\frac{(h+R_{\oplus}) \cdot v_f^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times 11.86661034 \text{ km/s}^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} - 1\right)^2 \times \frac{\cos^2(0^\circ)}{1} + \cancel{\sin^2(0^\circ)}^0 = 1.402040207 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{e = 1.4020}$$

Para calcularmos a energia precisamos novamente a (22) e a (3):

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} = \frac{(421.3 + 6378) \text{ km}}{2 - \frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (11.26661034 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}}$$

$$= -16911.99004 \text{ km} \Rightarrow \underline{a = -16912 \text{ km}}$$

$$G = -\frac{\mu}{2a} = \frac{-3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times (-16911.99004 \text{ km})} = 11.78453863 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \underline{G = 11.785 \text{ km}^2/\text{s}^2}$$

Como $e > 1$ e $G > 0$ podemos concluir que a nova órbita é do tipo hiperbólica.

ii)

Dado que a nova órbita é uma órbita hiperbólica, a ferramenta não irá descrever uma trajetória fechada, logo não faz sentido calcular o período da mesma.

No que toca à anomalia verdadeira, esta pode ser calculada através da equação de órbita (1):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow r(1 + e \cos \theta) = a(1 - e^2) \quad (*)$$

$$(*) \quad \cos \theta = \frac{-1 + \frac{a(1 - e^2)}{r}}{e} \Rightarrow \theta = \arccos \left[\frac{-1}{e} + \frac{a}{er}(1 - e^2) \right] =$$

$$= \arccos \left[\frac{-1}{1.402040207} + \frac{(-16911.99004 \text{ km}) \times (1 - 1.402040207^2)}{1.402040207 \times (421.3 + 6378) \text{ km}} \right] =$$

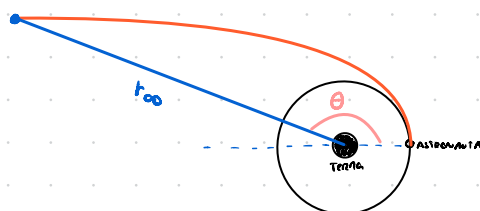
$$= 0.999999994 \text{ rad} = 57.29577917^\circ \Rightarrow \underline{\theta = 57.296^\circ}$$

Quando $t \rightarrow \infty$, o objeto afasta-se do foco (Terra) infinitamente, logo $r \rightarrow \infty$. Assim, pela expressão anterior temos:

$$\frac{a(1 - e^2)}{r \cdot e} \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_\infty = \arccos \left(\frac{-1}{e} \right) = \arccos \left(\frac{-1}{1.402040207} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 135.4996614^\circ \vee \theta = 315.4996614^\circ$$

Esquematisando isto temos:



Desde modo temos $\theta \in [0, \pi]$: $\theta = 135.50^\circ$

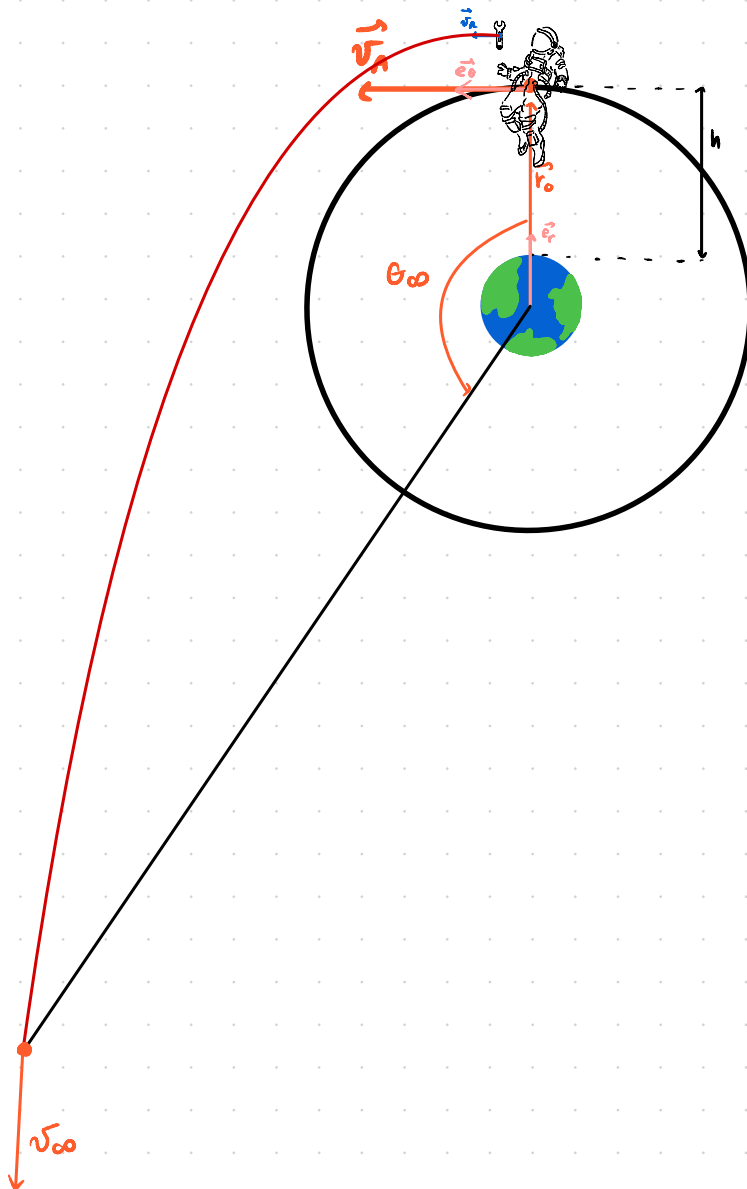
Relativamente à velocidade, podemos calculá-la pela equação vis-viva (9) :

$$v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v_\infty = \sqrt{2\mu_\oplus \left(-\frac{1}{2a} \right)} =$$

$$= \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{-1}{2 \times -16911.99004 \text{ km}} \right)} = 4.854779405 \text{ km/s} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $v_\infty = 4.8548 \text{ km/s}$

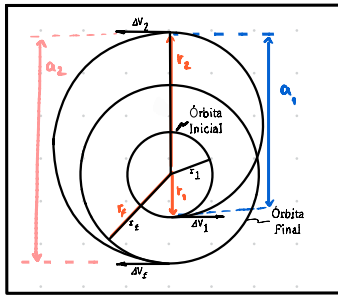
iii)



9

a) A velocidade de uma órbita circular é dada por (13) enquanto que a para uma órbita elíptica é dada pela equação vis-viva (9).

De acordo com a seguinte imagem temos:



$$a_1 = \frac{r_2 + r_1}{2} \text{ km (elipse menor)}$$

$$a_2 = \frac{r_2 + r_f}{2} \text{ km (elipse maior)}$$

Para esta questão vamos usar a seguinte nomenclatura:

v_{c_1} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_1 ;

v_{e_1} : Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente após de Δv_1 ;

$v_{e_{2A}}$: Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente antes de Δv_2 ;

$v_{e_{2P}}$: Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente após de Δv_2 ;

v_{e_f} : Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente antes de Δv_2 ;

v_{c_f} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_f ;

Deste modo para as questões pedidos temos:

$$\Delta v_1 = v_{e_1} - v_{c_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

$$\frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} = \frac{\sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}}{\sqrt{\mu / r_1}} = \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - 1 =$$

$$= \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} \right)} - 1 = \sqrt{2 \left(\frac{1 + \frac{r_2}{r_1} - 1}{1 + r_2/r_1} \right)} - 1 = \sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 \quad \text{c.g.m.}$$

$$\Delta v_2 = v_{e_{2P}} - v_{e_{2A}} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} =$$

$$\frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} = \frac{\sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}}{\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} = \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)} = \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} - \frac{1}{\frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{(r_1 + r_2)r_1 - r_1 r_2}{r_2(r_1 + r_2)} \right)} = \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) \left(1 - \frac{1}{\frac{r_f}{r_2} + 1} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2}} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1}\right)} \right]} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f + r_2 - r_2}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \times \frac{1}{1 + (r_2/r_1)}} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} \quad \text{C.g.m.}
\end{aligned}$$

$$\Delta v_3 = v_{cf} - v_{ef} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_2 + r_f} \right)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta v_3}{v_{cf}} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_2 + r_f} \right)}}{\sqrt{\mu/r_1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} - \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_2 + r_f} \right)} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_f} - \frac{r_1}{r_2 + r_f} \right)} = \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{2 \left(\frac{1}{(r_f/r_1)} - \frac{1}{\frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}} \right)} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \left(1 - \frac{1}{\frac{r_2}{r_f} + 1} \right)} = \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \left(1 - \frac{r_f}{r_f + r_2} \right)} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \left(\frac{r_f + r_2 - r_f}{r_f + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} =
\end{aligned}$$

No entanto, analisando o esquema representado do problema, verificamos que a representação de Δv_3 (Δv_f) não se encontra no sentido direto, logo o resultado obtido até agora corresponde ao simétrico da verdadeira expressão para $\frac{\Delta v_3}{v_{c1}}$. Logo temos, com o sentido correto de Δv_3 :

$$\frac{\Delta v_3}{v_{c1}} = - \left[\sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}\right)}} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}\right)}} - \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} \quad \text{c.g.m}$$

b) Para $r_2 \rightarrow \infty$, para o caso de uma transferência bi-elíptica infinita, temos as seguintes modificações nas expressões obtidas na alínea anterior:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta v_2}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\infty} \left(\frac{(r_f/r_1)}{(r_f/r_1) + \infty} \right)} - \sqrt{\frac{2}{\infty (1 + \infty)}} = 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta v_2)_{\infty} = 0 \quad \text{c.g.m}$$

Deste modo quando $r_2 \rightarrow \infty$ para uma transferência bi-elíptica infinita, temos $\Delta v_2 \rightarrow 0$.

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta v_1}{v_{c1}} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 \right] \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ indeterminação}$$

$$= \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2/r_1}{\frac{1}{r_2} + 1/r_1}} - 1 \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{r_1}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow (\Delta v_1)_{\infty} = (\sqrt{2} - 1) v_{c1}$$

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta v_3}{v_{c1}} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}\right)}} - \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} \right] =$$

$$= \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2}{r_f/r_1} \cdot \frac{1}{\frac{r_f}{r_2} + 1}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2r_1}{r_f}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{r_1}{r_f}}$$

$$\Rightarrow (\Delta v_3)_{\infty} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \cdot v_{c1}$$

Relativamente a esta órbita temos os seguintes problemas: elevada complexidade nos cálculos da trajetória; na definição dos parâmetros de órbita que podem causar erros significativos no resultado pretendido; satélite também fortemente sujeito a perturbações externas que, como a órbita é infinita, podem causar alterações na trajetória significativas; e o tempo da manobra é muito elevado.

No que toca a soluções temos: utilização de algoritmos avançados que tenham em conta as várias possíveis variáveis, de modo a minimizar os erros e a existência de sistemas de controlo que, face a perturbações externas, consigam corrigir a trajetória do satélite de volta à órbita pretendida.

c)

i) No caso de transferência bi-elíptica infinita, com $r_f = 14r_1$, podemos usar as expressões obtidas na alínea anterior, para obter Δv_{tot} em função de v_{c_1} :

$$\Delta v_{tot} = \sum_{i=1}^3 \|\Delta v_i\| = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = \Delta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_{tot}}{v_{c_1}} = (\sqrt{2} - 1) + 0 + (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{r_1}{r_f}}\right)$$

Sendo $r_f = 14 r_1$ obtemos finalmente:

$$\frac{\Delta v_{tot}}{v_{c_1}} = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{r_1}{14r_1}}\right) = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1}{14}}\right) = 0.524916393$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_{tot}}{v_{c_1}} = 0.52492$$

ii) No caso de transferência bi-elíptica infinita, com $r_f = 14r_1$ e $r_2 = 20r_1$, podemos usar as expressões obtidas na alínea anterior, para obter Δv_{tot} em função de v_{c_1} :

$$\frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} = \sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \times \frac{20r_1}{r_1}}{1 + \frac{20r_1}{r_1}}} - 1 = \sqrt{\frac{40}{1+20}} - 1 = 0.380131118$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} &= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{(20r_1/r_1) \left(\frac{(14r_1/r_1)}{(14r_1/r_1) + (20r_1/r_1)} \right)}} - \sqrt{\frac{2}{(20r_1/r_1) (1 + 20r_1/r_1)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{20 \left(\frac{14}{14+20} \right)}} - \sqrt{\frac{2}{20 (1+20)}} = 0.133913306 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_3}{v_{c_1}} &= \left[\sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \right] = \\
&= \left[\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{14\eta}{\eta}\right)} \frac{(20\eta/r_1)}{\left(\frac{14\eta}{\eta}\right) + \left(\frac{20\eta}{\eta}\right)}} - \sqrt{\frac{r_f}{14\eta}} \right] = \\
&= \sqrt{\frac{2}{14} \cdot \frac{20}{(14+20)}} - \sqrt{\frac{1}{14}} = 0.022624235
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_{tot}}{v_{c_1}} &= \frac{\Delta V_1}{v_{c_1}} + \frac{\Delta V_2}{v_{c_1}} + \frac{\Delta V_3}{v_{c_1}} = 0.380131118 + 0.133913306 + 0.022624235 = \\
&= 0.536668699
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_{tot}}{v_{c_1}} = 0.53667$$

iii) No caso de transferência bi-elíptica infinita, com $r_f = 14r_1$ e $r_2 = 40r_1$, podemos usar as expressões obtidas na alínea anterior, para obter ΔV_{tot} em função de v_{c_1} :

$$\frac{\Delta V_1}{v_{c_1}} = \sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \times \frac{40\eta}{\eta}}{1 + \frac{40\eta}{\eta}}} - 1 = \sqrt{\frac{80}{1+40}} - 1 = 0.316860591$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_2}{v_{c_1}} &= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(40r_1/\eta)} \left(\frac{(14r_f/\eta)}{(14\eta/\eta) + (40\eta/\eta)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(40r_1/r_1) (1 + 40\eta/\eta)}} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{40} \left(\frac{14}{14+40} \right)} - \sqrt{\frac{2}{40(1+40)}} = 0.038933493
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_3}{v_{c_1}} &= \left[\sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \right] = \\
&= \left[\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{14\eta}{\eta}\right)} \frac{(40\eta/r_1)}{\left(\frac{14\eta}{\eta}\right) + \left(\frac{40\eta}{\eta}\right)}} - \sqrt{\frac{r_f}{14\eta}} \right] = \\
&= \sqrt{\frac{2}{14} \cdot \frac{40}{(14+40)}} - \sqrt{\frac{1}{14}} = 0.058038382
\end{aligned}$$

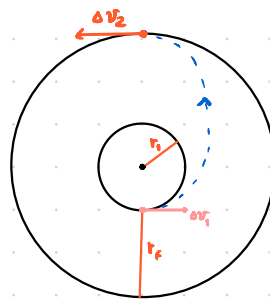
Assim temos:

$$\frac{\Delta v_{\text{tot}}}{v_{c1}} = \frac{\Delta v_1}{v_{c1}} + \frac{\Delta v_2}{v_{c1}} + \frac{\Delta v_3}{v_{c1}} = 0.316860591 + 0.098933493 + 0.058038782 =$$

$$= 0.533832866$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_{\text{tot}}}{v_{c1}} = 0.53383$$

iv) Considerando agora que, em vez de uma transferência bi-elítica de 3 impulsos, estamos perante uma transferência de Hohmann de 2 impulsos, sendo a 1ª entre a órbita circular de raio r_1 e a órbita de transferência elíptica, e a 2ª entre essa órbita elíptica de transferência e a órbita circular de raio r_f , temos a seguinte imagem:



(considerando o sentido directo)

Para esta análise vamos usar a seguinte nomenclatura:

- v_{c1} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_1 ;
- v_{e1} : Velocidade para órbita elíptica imediatamente após 1º impulso;
- v_{e2} : Velocidade para órbita elíptica imediatamente antes 2º impulso;
- v_{cf} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_f ;

A velocidade de uma órbita circular é dada por (13) enquanto que a para uma órbita elíptica é dada pela equação vis-viva (9), sendo que o semi-eixo maior da órbita elíptica de transferência é dada por $a = \frac{r_1 + r_f}{2}$.

Calculando estas velocidades em função de v_{c1} temos:

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

$$v_{cf} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_f}} = v_{c1} \sqrt{\frac{r_1}{r_f}}$$

$$v_{e1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_f} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1} \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{r_f}{r_1}} \right)} =$$

$$= v_{c1} \sqrt{2 \left(\frac{1 + \frac{r_f}{r_1} - 1}{1 + \frac{r_f}{r_1}} \right)} = v_{c1} \sqrt{\frac{2 (r_f / r_1)}{1 + (r_f / r_1)}}$$

$$\begin{aligned} v_{e2} &= \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_f + r_1} \right)} = \sqrt{2\mu \left(\frac{r_f + r_1 - r_f}{r_f (r_1 + r_f)} \right)} = \\ &= \sqrt{2\mu \frac{r_1}{r_f (r_1 + r_f)}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} \cdot \frac{r_1^2}{r_f (r_1 + r_f)}} = v_{c1} \sqrt{\frac{2 r_1^2}{r_f (r_1 + r_f)}} \\ &= v_{c1} \sqrt{\frac{2 r_1}{(r_f / r_1) (r_1 + r_f)}} = v_{c1} \sqrt{\frac{2}{(r_f / r_1) (1 + r_f / r_1)}} \end{aligned}$$

Deste modo, a variação de velocidade no 1º impulso é dada por:

$$\Delta v_1 = v_{e1} - v_{c1} = v_{c1} \sqrt{\frac{2 (r_f / r_1)}{1 + (r_f / r_1)}} - v_{c1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_1}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{2 (r_f / r_1)}{1 + (r_f / r_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 (14 r_1 / r_1)}{1 + (14 r_1 / r_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 14}{15}} - 1 \Rightarrow$$

$r_f = 14 r_1$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_1}{v_{c1}} = 0.366260102$$

A velocidade para o segundo impulso é dada por:

$$\Delta v_2 = v_{c2} - v_{e2} = v_{c1} \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} - v_{c1} \sqrt{\frac{2}{(r_f / r_1) (1 + r_f / r_1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_2}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f / r_1) (1 + r_f / r_1)}} = \sqrt{\frac{r_1}{14 r_1}} - \sqrt{\frac{2}{(14 r_1 / r_1) (1 + 14 r_1 / r_1)}} = \sqrt{\frac{1}{14}} - \sqrt{\frac{2}{14 \times 15}} \Rightarrow$$

$r_f = 14 r_1$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_2}{v_{c1}} = 0.169671234$$

Por fim, a variação de velocidade total é dada por:

$$\frac{\Delta v_{tot}}{v_{c1}} = \frac{\Delta v_1}{v_{c1}} + \frac{\Delta v_2}{v_{c1}} = 0.366260102 + 0.169671234 = 0.535931336 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_{tot}}{v_{c1}} = 0.53593$$

v) Organizando os resultados obtidos temos a seguinte tabela:

TRANSFERÊNCIA	$\Delta V_{tot} / v_{c1}$
bi-elíptica infinita, $r_2 \rightarrow \infty$	0.52492
bi-elíptica, $r_2 = 20r_1$	0.53667
bi-elíptica, $r_2 = 40r_1$	0.53383
Hohmann, sentido direto	0.53593

Pela observação dos resultados obtidos podemos concluir que, em termos de eficiência relativamente ao consumo de ΔV , a transferência bi-elíptica infinita é a melhor opção, pois tem o menor valor para $\frac{\Delta V_{tot}}{v_{c1}}$.

Por outro lado, não é possível estabelecer uma relação de eficiência entre as transferências bi-elíptica e Hohmann diretamente sem ter em conta a relação de $\frac{r_2}{r_1}$. Analisando a tabela conclui-se que a transferência de Hohmann é a mais eficiente, em termos de $\Delta V_{tot}/v_{c1}$, do que a transferência bi-elíptica para $\frac{r_2}{r_1} = 20$ e menos eficiente para $\frac{r_2}{r_1} = 40$.

Através desta análise podemos concluir que existe um valor de $\frac{r_2}{r_1}$ para o qual $\left(\frac{\Delta V_{tot}}{v_{c1}}\right)_{bi-elíptica} = \left(\frac{\Delta V_{tot}}{v_{c1}}\right)_{transf. Hohmann}$, sendo a transferência de Hohmann mais (menos) eficiente do que a bi-elíptica para valores inferiores (superiores) de $\frac{r_2}{r_1}$.

d) O período de uma órbita é dado pela equação (14). Para determinar o tempo total das manobras de transferência, em função do período da órbita circular de raio r_1 (T_{c1}), vamos calcular T_{c1} dada por:

$$T_{c1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot r_1^{3/2} =$$

O tempo que uma transferência bi-elíptica demora a ser realizada é igual à soma de metade dos períodos dos 2 órbitas elípticos envolvidos na transferência, sendo o semi-eixo maior associado a cada uma destas:

$$\rightarrow 2a = r_1 + r_2, \text{ para uma das órbitas elípticas,}$$

$$\rightarrow 2a = r_f + r_2, \text{ para a outra}$$

$$\text{Assim, } \Delta t_{bi-elíptica} = \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{2f}}{2}$$

Assim, o tempo necessário para ocorrer a transferência é dado por:

$$\Delta t_{\text{bi-elíptica}} = \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{2f}}{2}$$

Período de órbita caracterizado por $2a = r_1 + r_2$, em função de T_{C1} :

$$(14) \quad T_{12} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} (r_1)^{3/2} \left(\frac{1 + r_2/r_1}{2} \right)^{3/2} = T_{C1} \left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2}$$

Período de órbita caracterizado por $2a = r_1 + r_2$, em função de T_{C1} :

$$(14) \quad T_{2f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_2 + r_f}{2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot (r_1)^{3/2} \cdot \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} = T_{C1} \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2}$$

Tempo total necessário para ocorrer a transferência:

$$\frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C1}} = \frac{T_{12}}{2 T_{C1}} + \frac{T_{2f}}{2 T_{C1}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] =$$

Associando os algarismos da pergunta anterior

i) Para a transferência bi-elíptica infinita ($r_2 \rightarrow \infty$) temos:

$$\frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C1}} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \overbrace{(r_2/r_1)}^{\infty}}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{\overbrace{r_2 + r_f}^{\infty}}{2r_1} \right)^{3/2} \right] \right) = \infty + \infty = \infty$$

Este resultado faz sentido fisicamente, visto que o tempo necessário para percorrer uma órbita infinita deve ser também infinito.

ii) Para a transferência bi-elíptica com $r_2 = 20r_1$ e $r_f = 14r_1$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C1}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \left(\frac{20r_1}{r_1} \right)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{20r_1 + 14r_1}{2r_1} \right)^{3/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+20}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{20+14}{2} \right)^{3/2} \right] = 52.05834215 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_{\text{tot}}}{T_{C1}} = 52.058$$

iii) Para a transferência bi-elíptica com $r_2 = 40r_1$ e $r_f = 14r_1$ temos:

$$\frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C1}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \left(\frac{40r_1}{r_1} \right)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{40r_1 + 14r_1}{2r_1} \right)^{3/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+40}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{40+14}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] = 116.5569065$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_{tot}}{T_{C_1}} = 116.56$$

iv) O tempo necessário para que ocorra a transferência de Hohmann é igual a metade do período de uma órbita elíptica caracterizada pelo seu eixo maior, $2a = r_1 + r_f$. Deste modo o tempo que esta demora a ocorrer é:

$$\Delta t_{Hohmann} = \frac{T_{1f}}{2}$$

Período da órbita elíptica caracterizada por $2a = r_1 + r_f$, em função de T_{C_1} :

$$T_{1f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_1 + r_f}{2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot r_1^{3/2} \left(\frac{1 + r_f/r_1}{2} \right)^{3/2} = T_{C_1} \left(\frac{1 + r_f/r_1}{2} \right)^{3/2}$$

Logo,

$$\frac{\Delta t_{Hohmann}}{T_{C_1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (r_f/r_1)}{2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad \begin{matrix} \text{r}_f = 14r_1, \text{ pelo enunciado} \\ \downarrow \end{matrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (14r/r_1)}{2} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+14}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = 10.26979395$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_{Hohmann}}{T_{C_1}} = 10.270$$

v) Deste modo podemos organizar estes valores na seguinte tabela:

TRANSFERÊNCIA	$\frac{\Delta t_{tot}}{T_{C_1}}$
bi-elíptica infinita, $r_2 \rightarrow \infty$	∞
bi-elíptica, $r_2 = 20r_1$	52.058
bi-elíptica, $r_2 = 40r_1$	116.56
Hohmann, sentido direto	10.270

Analisando a tabela, concluímos que a manobra de Hohmann é a mais rápida de ser executada, visto que esta apresenta o menor valor para $\frac{\Delta t_{tot}}{T_{C_1}}$.

Também podemos concluir que o tempo necessário para realizar a manobra bi-elíptica aumenta numa relação de proporcionalidade direta com r_2 . Ou seja:

manobra bi-elítica infinita ($r_2 \rightarrow \infty$), observamos que o tempo que esta transferência demora a ser executada é também infinito, o que a torna impraticável na realidade.

e)

i) Tendo em consideração que o combustível do satélite é importante para maximizar o seu tempo útil de vida e sabendo que a missão não é urgente, a manobra escolhida para a transferência do satélite entre órbitas deve priorizar a eficiência em detrimento do tempo necessário para a realização da manobra. A manobra mais eficiente é a bi-elítica infinita, embora, como referido anteriormente, esta manobra é um caso extremo impraticável. Deste modo, a manobra escolhida seria a manobra bi-elítica com $r_2 = 40/r_1$, isto pois é a que apresenta menor Δv_{tot} , consequentemente tornando-a mais eficiente o que, por sua vez, permitira poupar uma maior quantidade de combustível.

ii) Tendo em conta que a missão é muito urgente e crucial para o sucesso da operação, o fator decisivo e de maior importância é a rapidez com que a manobra pode ser executada. Assim, a manobra que deve ser realizada neste caso é a manobra de Hohmann, visto ser a manobra com menor Δv_{tot} , isto é, que demora menos tempo a ser executada. Isto vai permitir uma atracção rápida com uma menor despesa em combustível.

10

Para o valor de $X = 0.710$ temos:

$$T = (95 + 10 \times 0.710) = 102.1 \text{ min} = 102.1 \times 60 \text{ s} = 6126 \text{ s}$$

$$|\dot{\Omega}| = (2.5 + 0.710) = 3.21^\circ / \text{dia solar médio}$$

Como o nodo ascendente se move para este, então temos $\dot{\Omega} > 0$, logo:

$$\dot{\Omega} = \frac{3.21 \cdot (\pi/180) \text{ rad}}{24 \times 3600 \text{ s}} = 6.484382985 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

dia solar
médio

Sendo a órbita uma órbita circular de raio r_c ($a = r_c$), também se conclui que a excentricidade é nula, $e = 0$.

O raio, r_c , desta órbita pode ser calculado através da manipulação da expressão (14):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_\oplus}} \cdot r_c^{3/2} \Rightarrow r_c = \left(\frac{T \sqrt{\mu_\oplus}}{2\pi} \right)^{2/3} = \left(\frac{6126 \text{ s} \times \sqrt{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}}{2\pi} \right)^{2/3} = 7236.199208 \text{ km} = r_c$$

Pela fórmula temos (15):

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_c^3}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(7236.199208 \text{ km})^3}} = 1.025658718 \times 10^{-3} / \text{s}$$

Considerando a seguinte fórmula de formulação podemos finalmente calcular o valor da inclinação, i :

$$(33) \quad \dot{\Omega} = - \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \cos i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos i = \Omega \left(\frac{-2a^2 (1-e^2)^2}{3n J_2 R_{\oplus}^2} \right) = \Omega \left(\frac{-2r_c^2 (1-e^2)^2}{3n J_2 R_{\oplus}^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \arccos \left(\frac{-2\Omega r_c^2 (1-e^2)^2}{3n J_2 R_{\oplus}^2} \right) =$$

$i \in [0^\circ, 180^\circ]$

$$= \arccos \left(\frac{-2 \times 6.484382985 \times 10^{-7} \text{ rad/s} \times (7236.199208 \text{ km})^2}{3 \times 1.025658718 \times 10^{-3} / \text{s} \times 0.00108263 \times (6378 \text{ km})^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 120.0744875^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{i = 120.07^\circ}$$

11

i) As órbitas Molniya são usadas por países que se encontram em latitudes altas, nos quais os satélites geostacionários não são muito eficazes, pois sofrem uma interferência significativa causada pelas irregularidades do terreno, por exemplo.

Assim, os satélites Molniya são satélites não geostacionários com uma órbita de elevada excentricidade, de modo a maximizar o tempo da cobertura. De forma a que o satélite passe a maior parte do tempo sobre a zona de interesse é necessário evitar a variação do argumento do perigeu ($\dot{\omega}$), resultado este que pode ser conseguido para determinados inclinações de modo a este ser nulo ($\dot{\omega} = 0$).

Podemos determinar essas inclinações (i) recorrendo à seguinte fórmula de formulação:

$$(34) \quad \dot{\omega} = \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right)$$

$$\dot{\omega} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \Rightarrow$$

$i \in [0^\circ, 180^\circ]$

$$\Rightarrow 2 = \frac{5}{2} \sin^2 i \Leftrightarrow i = \arcsen \left(\pm \sqrt{\frac{4}{5}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 63.43494882^\circ \vee i = 116.5650512^\circ$$

Deste modo, as inclinações possíveis para uma órbita Melniya são:

$$\rightarrow i = 63.435^\circ$$

$$\rightarrow i = 116.57^\circ$$

ii) Para uma órbita Sun-Synchronous é importante que os polos sazonais mantenham o mesmo ângulo de incidência. Para que o plano orbital mantenha este ângulo, é necessário que este rode 2π radianos ($\Delta\Omega = 2\pi \text{ rad}$) ao fim de uma revolução completa da Terna em torno do Sol (1 ano sidereal). Para isso temos:

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi}{1 \text{ ano sidereal}} = \frac{2\pi}{365.26 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 1.990966768 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

É importante referir que a Terna dá uma revolução completa em torno do Sol no sentido directo, pelo que $\dot{\Omega}$ tem de ser positivo ($\dot{\Omega} > 0$). Por conseguinte, tendo em conta a equação (33), temos:

$$\dot{\Omega} = \frac{-3 n J_2 R_\oplus^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \cdot \cos i > 0 \Rightarrow \cos i < 0 \Rightarrow i \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

$\uparrow$
 $(e < 1)$
 pois a órbita é elíptica

$\uparrow$
 $i \in [0, \pi]$

$\downarrow$
 dos valores obtidos em i)
 $i = 116.57^\circ$

Deste modo, como $\dot{\Omega} > 0$ estamos perante uma órbita retrógrada de inclinação $i = 116.57^\circ$.

De acordo com o enunciado temos: $T = \frac{1 \text{ dia sidereal}}{2} = \frac{86164.09 \text{ s}}{2} = 43082.045 \text{ s}$

Rearranjando a expressão (14) podemos obter o valor do semi-eixo maior desta órbita elíptica:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \Rightarrow a = \left[\frac{T \cdot \sqrt{\mu}}{2\pi} \right]^{2/3} = \left[\frac{43082.045 \text{ s} \cdot \sqrt{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}}{2\pi} \right]^{2/3} = 26561.75251 \text{ km}$$

A velocidade de revolução é dada por (15):

$$h = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{43082.045 \text{ s}} = 1.45842318 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

A excentricidade é dada pela equação da variação média da ascensão recta do nodo ascendente (33):

$$r = \frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \cdot \cos i \Rightarrow (1-e^2)^2 = \frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 \cdot r} \cdot \cos i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-e^2 = \sqrt{\frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2 \cos i}{2a^2 \cdot r}} \quad (=) \quad e^2 = 1 - \sqrt{\frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2 \cos i}{2a^2 \cdot r}} \Rightarrow$$

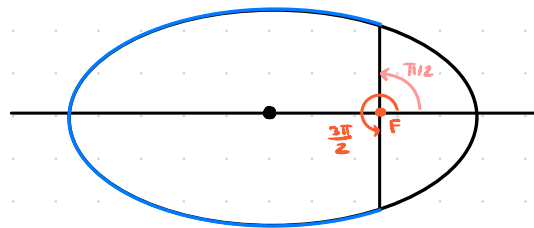
$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2 \cos i}{2a^2 \cdot r}}} \Rightarrow$$

numa órbita elíptica
 $e \in]0, 1[$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{-3 \times 1.45842318 \times 10^{-4} \text{ rad/s} \times 0.00108263 \times (6378 \text{ km})^2 \times \cos(116.5650512^\circ)}{2 \times (26561.75251 \text{ km})^2 \times 1.990966768 \times 10^{-3} \text{ rad/s}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = 0.908219062 \Rightarrow \underline{e = 0.90822}$$

iii) De acordo com o enunciado temos a seguinte representação da órbita:



O período orbital que o satélite demora a percorrer a parte da órbita, representada a azul, entre os valores $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ da anomalia verdadeira corresponde a diferença entre o período da 2ª órbita total e o dobro do tempo que o satélite demora desde a periapside até $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é:

$$T_{\left(\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}\right)} = T - 2T_{\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)}$$

Onde $T_{\left(\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}\right)}$ é o período orbital que o satélite demora a percorrer a órbita entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $T_{\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)}$ o período orbital desde a periapside até $\theta = \frac{\pi}{2}$.

O período orbital desde a periapside até $\theta = \frac{\pi}{2}$ pode ser calculado pela eq. de Kepler, presente na fórmula:

$$(35) \quad M = n(t - t_0) = E - e \sin E$$

Podemos calcular a anomalia excêntrica pela seguinte fórmula do formulário:

$$(36) \quad \boxed{\tan E = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin \theta}{e + \cos \theta}} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \overbrace{\sin(\pi/2)}^1}{e + \underbrace{\cos(\pi/2)}_0} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \Rightarrow$$

$\uparrow$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow E = \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - (0.908219062)^2}}{0.908219062} \right)$$

$$\Rightarrow E = 24.73961226^\circ \vee E = 204.7396123^\circ \Rightarrow \left(\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ logo } E \in 1^\circ \text{ quadrante} \right)$$

$$\Rightarrow E = 24.73961226^\circ = 0.431387689 \text{ rad}$$

Com a velocidade de rotação (15), temos $n = 2\pi/T$.

Agora recorrendo a (35) podemos finalmente determinar o valor pretendido:

$$n(t - t_0) = E - e \sin E \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} (t - t_0) = E - e \sin E \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad t - t_0 = \frac{(E - e \sin E) \cdot T}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\theta=\frac{\pi}{2}} = t - t_0 = \left(\frac{E - e \sin E}{2\pi} \right) \cdot T$$

Assim temos finalmente:

$$T_{\left(\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}\right)} = T - 2T_{\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)} = \left[1 - \frac{2(E - e \sin E)}{2\pi} \right] T$$

Sabendo que a percentagem total pedida é dada por $\frac{T_{\left(\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}\right)}}{T}$, obtemos:

$$\frac{T_{\left(\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}\right)}}{T} = \left[1 - \frac{2(E - e \sin E)}{2\pi} \right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \times [0.431387689 \text{ rad} - 0.908219062 \times \sin(0.431387689 \text{ rad})] =$$

$$= 0.98354259 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\left(\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}\right)}}{T} = 0.98354 = \underline{\underline{98.354\%}}$$