

Mecânica Orbital, 2023/24
Trabalho Para Casa #3 (TPC-3)

Data limite de entrega: 30/Out/2023, 23:59

Instruções para o TPC. Leia atentamente e preencha correctamente o solicitado abaixo. Após preenchida, esta folha deve ser entregue em conjunto com as resoluções e respostas solicitadas no trabalho. A classificação só será atribuída se todos os campos estiverem correctamente preenchidos.

Grupo. Indique o número de grupo de TPC, de acordo com o fenix:

Grupo #: 6

Compromisso de honra. Ao entregar este trabalho de casa com a sua identificação incluída, os alunos estão automaticamente a declarar que realizaram o trabalho nas condições do compromisso de honra seguinte:

Declaro por minha honra que a prova foi resolvida recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação, por qualquer meio, com qualquer pessoa fora do grupo e cumprindo todas as regras indicadas da disciplina. Em particular, não foram utilizados quaisquer elementos realizados por outrem com resoluções adaptadas a esta prova.

Identificação e participação. Preencham de modo legível os (i) número de aluno, (ii) nome completo, e (iii) a percentagem de participação de cada aluno no trabalho, de acordo com o indicado mais abaixo

Número	Nome	%
103354	Laurenço Gouveia Faria	4
102939	Mariana F. Alves C. Pires	4
103285	Tiago Cruz Clamete	4

A percentagem de participação de cada aluno no trabalho deve ser um número inteiro de 0 a 4, em que 4 é 100% do trabalho devido de cada aluno, 3 é 75% do trabalho devido, etc., até 0, caso o aluno não tenha participado. Este valor deve ser consensual entre alunos. A classificação de cada aluno é a classificação do trabalho multiplicada pela percentagem de participação. Em caso de divergência, o grupo deve apelar o mais depressa possível ao professor responsável pela disciplina. **O preenchimento do campo % é obrigatório, sob pena de anulação da classificação.**

Parâmetro adimensional. No enunciado de alguns problemas será usado um parâmetro adimensional χ obtido a partir dos números de alunos dos membros do grupo. Para um grupo constituído por N alunos, seja n_i o número que se obtém a partir do número do aluno i mantendo apenas os três últimos algarismos. Seja

$$p = \prod_{i=1}^N n_i.$$

Seja q o número constituído pelos 3 últimos algarismos de p . Então, $\chi = \frac{q}{1000}$.

Exemplo. Um grupo é constituído por 3 alunos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A, com número } 100123 \Rightarrow n_A = 123 \\ \text{B, com número } 101412 \Rightarrow n_B = 421 \\ \text{C, com número } 90321 \Rightarrow n_C = 321 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p = 123 \times 421 \times 321 = 16622343 \\ q = 2343 \Rightarrow \chi = \frac{2343}{1000} = 2.343 \end{array}$$

χ do grupo. Calcule o χ do grupo de acordo com a fórmula e exemplo acima e indique-o na caixa:

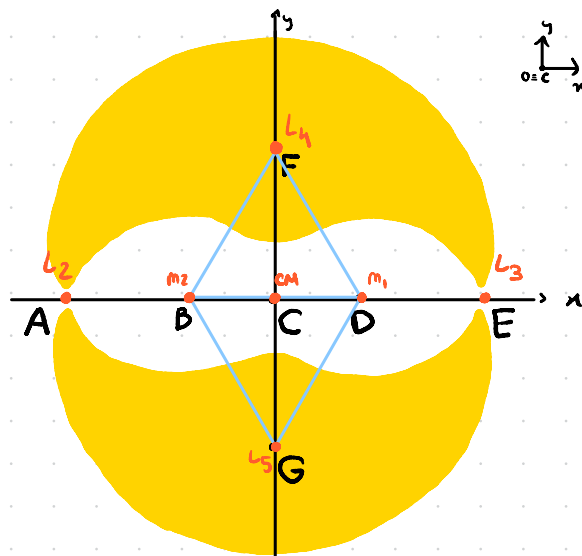
χ do grupo = 0,710

1

Para o valor de $X = 0.710$ temos o seguinte valor para a constante de Jacobi:

$$C = (0.710/10) - 1.7277 = -1.6567$$

a)



i) Observando a figura, temos que esta é simétrica segundo os eixos x e y , logo o centro de massa da mesma situa-se na origem do referencial, isto é, coincide com o ponto C .

ii) Novamente, como a figura é simétrica segundo x e y , e considerando que os primários se encontram alinhados com o centro de massa, no eixo x , temos que o primário 1 coincide com o ponto D (com abscissa positiva) e o primário 2 coincide com B (abscissa negativa).

iii) Os pontos triangulares de Lagrange são denominados de L_4 e L_5 . Cada um dos pontos triangulares forma um triângulo equilátero com os primários, como representado a azul claro na figura. Deste modo, em conformidade com o referencial definido, temos que o ponto triangular L_4 coincide com F (encontra-se no semi-eixo positivo de y) e o ponto triangular L_5 coincide com G (encontra-se no semi-eixo negativo de y).

iv) Os pontos colineares de Lagrange são denominados por L_1 , L_2 e L_3 . Estes encontram-se no mesmo eixo que os primários e que o centro de massa. Deste modo, considerando L_1 como o ponto colinear entre os primários 1 e 2 temos que este coincide com o centro de massa, isto é, com o ponto C . O ponto colinear L_2 situa-se além do primário de menor massa, enquanto que L_3 se situa além do primário de maior massa. Como, neste caso, os primários têm massas iguais (visto a figura ser simétrica relativamente a ambos os eixos x e y) podemos ter L_2 e L_3 a coincidir com A e E , respetivamente, tanto como o simétrico L_2 a coincidir com E e L_3 a coincidir com A . Para este trabalho iremos assumir a convenção de $L_2 \equiv A$ e $L_3 \equiv E$.

b) Para o valor de $X = 0.710$ temos o seguinte valor para a massa total do sistema:

$$m = (2 + 0.710) \times m_{\odot} = 2.710 \times 1.9885 \times 10^{30} \text{ kg} = 5.388835 \times 10^{30} \text{ kg}$$

i) De acordo com os parâmetros de adimensionalização temos as seguintes definições para as massas dos primários, notando que " μ " corresponde à massa adimensional de m_2 (nã é a constante gravitacional utilizada nos trabalhos anteriores):

$$(1) \quad m_1 + m_2 = 1 \quad (\text{adimensionalização das massas})$$

$$(2) \quad m_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu$$

$$(3) \quad m_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \mu$$

Como as massas dos primários são iguais, podemos determinar μ da seguinte forma:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow 1 - \mu = \mu \Rightarrow 1 = 2\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$$

ii) Como se viu anteriormente na alínea a), os primários têm massas iguais, deste modo, as suas massas são dadas por:

$$m_{\text{primário } \odot} = m_{\text{primário } \oplus} = \frac{m_{\text{total}}}{2} = \frac{5.388835 \times 10^{30} \text{ kg}}{2} = 2.6944175 \times 10^{30} \text{ kg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{m_{\text{primário } \odot} = m_{\text{primário } \oplus} = 2.6944 \times 10^{30} \text{ kg}}$$

c) De acordo com o problema dos 3 corpos, os pontos de Lagrange colineares são sempre instáveis, deste modo, L_1 , L_2 e L_3 são considerados instáveis, independentemente do valor de μ (a massa adimensional do primário 2).

Relativamente aos pontos de Lagrange triangulares (L_4 e L_5) estes podem ser tanto estáveis como instáveis, sendo há estabilidade caso as massas dos primários sejam suficientemente diferentes (a massa de um tem de ser inferior a aproximadamente 4% da massa do outro). Perante uma perturbação temos a seguinte equação característica que descreve um problema de valores próprios para $\vec{A}$:

$$(4) \quad \vec{\delta r} = \vec{A} \cdot e^{\lambda t}$$

Desenvolvendo o problema temos a sua simplificação para a seguinte equação quadrática, relativamente a λ^2 :

$$(5) \quad (\lambda^2)^2 + \lambda^2 - \frac{27}{4}\mu(\mu-1) = 0$$

Da sua solução temos:

$$(6) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} \right)$$

Da expressão (4), concluímos que, para haver estabilidade, temos que garantir que os expoentes λ têm de ter parte real negativa ou serem imaginários puros. Se estas condições não se verificarem a parte real de λ será positiva e consequentemente $\vec{r}$ irá crescer de forma indefinida, afastando-se do ponto de Lagrange. Assim:

$$\text{Limite de estabilidade: } 1 - 27\mu(1-\mu) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 1 - 27\mu + 27\mu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{\text{crítico}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{69}}{18} \quad \Rightarrow$$

$$(|\mu| < 1) \quad \Rightarrow \quad \mu_{\text{crítico}_1} = 0.0385209 \quad ; \quad \mu_{\text{crítico}_2} = 0.961479$$

Com base nestes valores e substituindo-os na equação (6) concluímos que os pontos triangulares são estáveis para $\mu < 0.0385209$ ou $\mu > 0.961479$. Como $\mu = \frac{1}{2}$, considerando o problema de 3 corpos perfeito, vemos que este não pertence à gama de valores de μ para os quais L_4 e L_5 são estáveis.

Assim, podemos concluir que, neste caso, os pontos de Lagrange triangulares L_4 e L_5 não são estáveis. Em suma, para esta figura todos os pontos de Lagrange são instáveis.

d)

i) Estando a sonda, inicialmente, num ponto exterior à zona proibida representada na imagem, é possível esta atingir os primários, uma vez que existe uma trajetória possível (passando pela pequena abstrusa em E ou em A) através da qual a sonda os atinge evitando zonas proibidas.

ii) De acordo com a imagem, não existe nenhuma trajetória alternativa para a sonda que não passe por zonas proibidas, uma vez que o ponto triangular L_4 se encontra numa densa região de estrelas. Deste modo, a sonda não poderá atingir o ponto L_4 .

e) O centro de massa tem coordenadas $(x, y) = (0, 0)$, coincidindo este com o ponto C.

Para as distâncias do primeiro primário primário e do segundo primário ao centro de massa, temos $\vec{r}_{\text{CM} \rightarrow \text{primário}_1} = (1-\mu, 0, 0)$ e $\vec{r}_{\text{CM} \rightarrow \text{primário}_2} = (\mu, 0, 0)$, de acordo com a convenção. Deste modo, recorrendo às seguintes fórmulas do formulário, podemos obter os valores de r_1 e r_2 , os quais vamos precisar para obter a velocidade pretendida. Considerando $\mu = \frac{1}{2}$ da alínea b) temos:

$$(7) \quad r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2} \quad \xrightarrow{(\mu=\frac{1}{2})} \quad r_1 = \sqrt{(0-\frac{1}{2})^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{(0+1-\frac{1}{2})^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$$

Da formulação temos a seguinte expressão para o integral de Jacobi em função da velocidade medida no referencial em rotação:

$$(9) \quad C = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

Substituindo pelos valores anteriormente obtidos e pela constante C do enunciado, obtemos o valor para o módulo da velocidade da sonda, quando esta passa num determinado instante pelo centro de massa:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = r_2 = \frac{1}{2} \\ C = -1.6567 \\ CM(24) = (0, 0) \end{array} \right\} -1.6567 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (\cancel{0^2} + \cancel{0^2}) - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1/2} - \frac{1/2}{1/2} \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) -1.6567 = \frac{v^2}{2} - 2 \quad (\Rightarrow) v = 0.828613299 \Rightarrow \underline{v_{\text{sonda}} = 0.82861}$$

- ② De acordo com os dados do enunciado podemos concluir que estamos perante um problema de viagem interplanetária, a qual está dividida em 3 partes.

Se uma sonda estiver suficientemente próxima de um planeta, a força exercida na mesma pelo planeta contribui muito mais que a força exercida pelo Sol (a qual pode ser desprezada). Tratando-se o problema, deste modo, como um problema de 2 corpos (planeta + sonda). A zona onde estas características se verificam é designada de zona de influência. Esta aproximação é frequentemente utilizada em viagens interplanetárias (como neste nosso caso), visto que pretende-se que a sonda se aproxime ao escape de um determinado planeta, isto é, o tempo de passagem desta pelo planeta muito inferior ao tempo da viagem, levando a que o erro induzido por esta aproximação seja muito pequeno.

Para este problema temos as seguintes 3 fases da viagem interplanetária:

→ Partida da Terra:

De acordo com a definição considera-se que toda a que acontece nesta fase acontece no ponto de partida, segundo a perspetiva de Sol. Também temos que a sonda chega a infinito quando escapa do planeta, isto é, a velocidade da sonda no ponto de partida relativamente ao planeta é dada por v_{∞} .

→ Transferência heliocêntrica:

Neste caso corresponde a uma transferência de Hohmann entre 2 pontos, onde se encontram os planetas de partida (Terra) e de chegada (Marte). As órbitas dos planetas são considerados como sendo circulares, o que resulta nos mesmos ângulos heliocêntricos e igual geometria de transferência.

→ Chegada a Marte:

Considerando-se que a sonda vem de infinito com velocidade v_{∞} relativamente ao planeta em que se encontra, sobre a assíntota da hipérbole, exatamente como visto na partida.

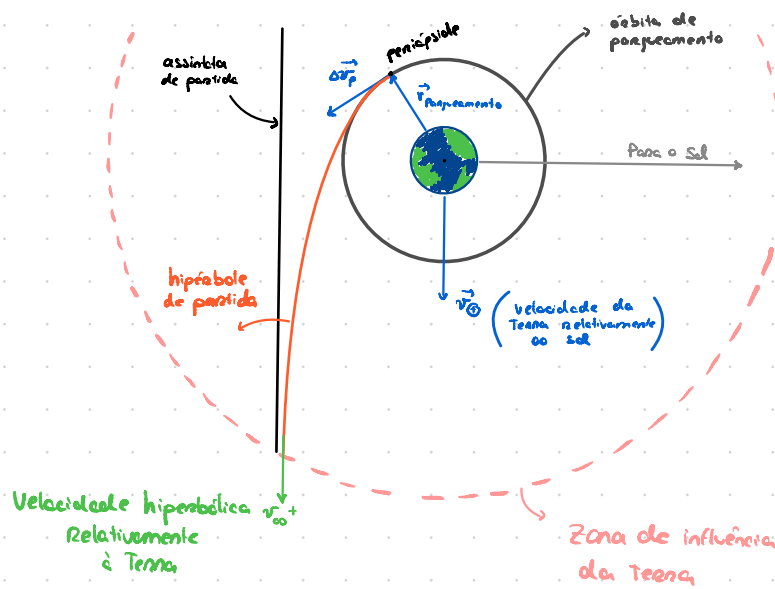


IMAGEM
PARTIDA

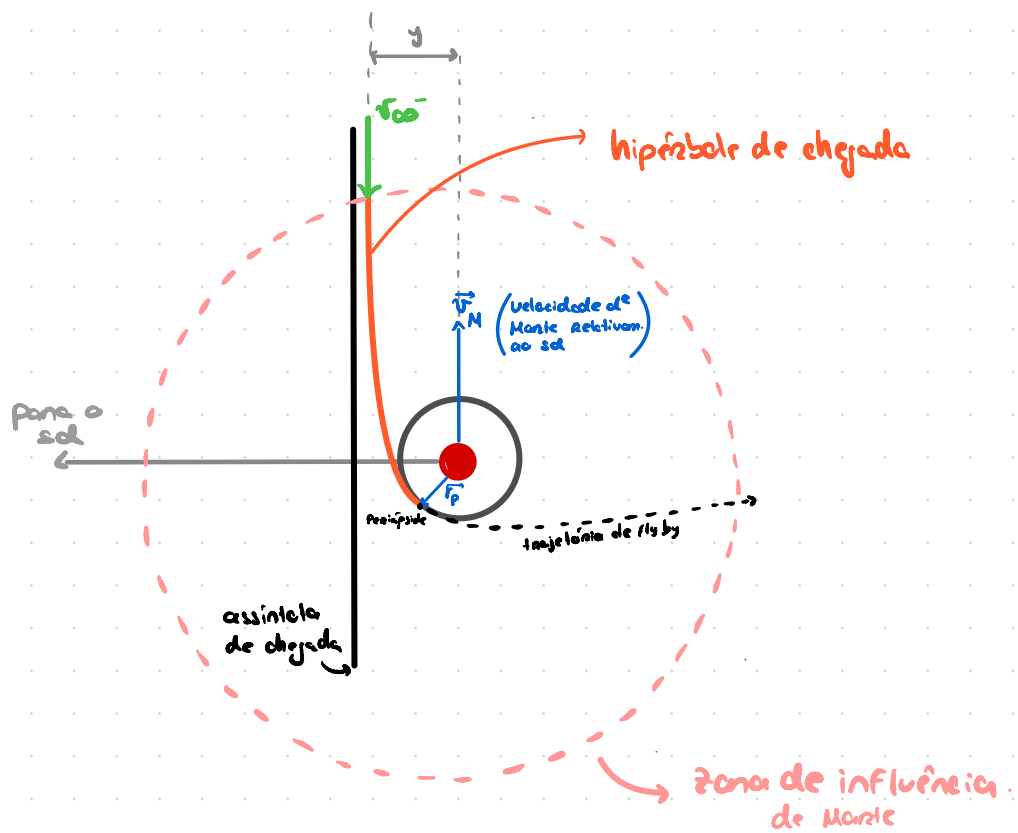
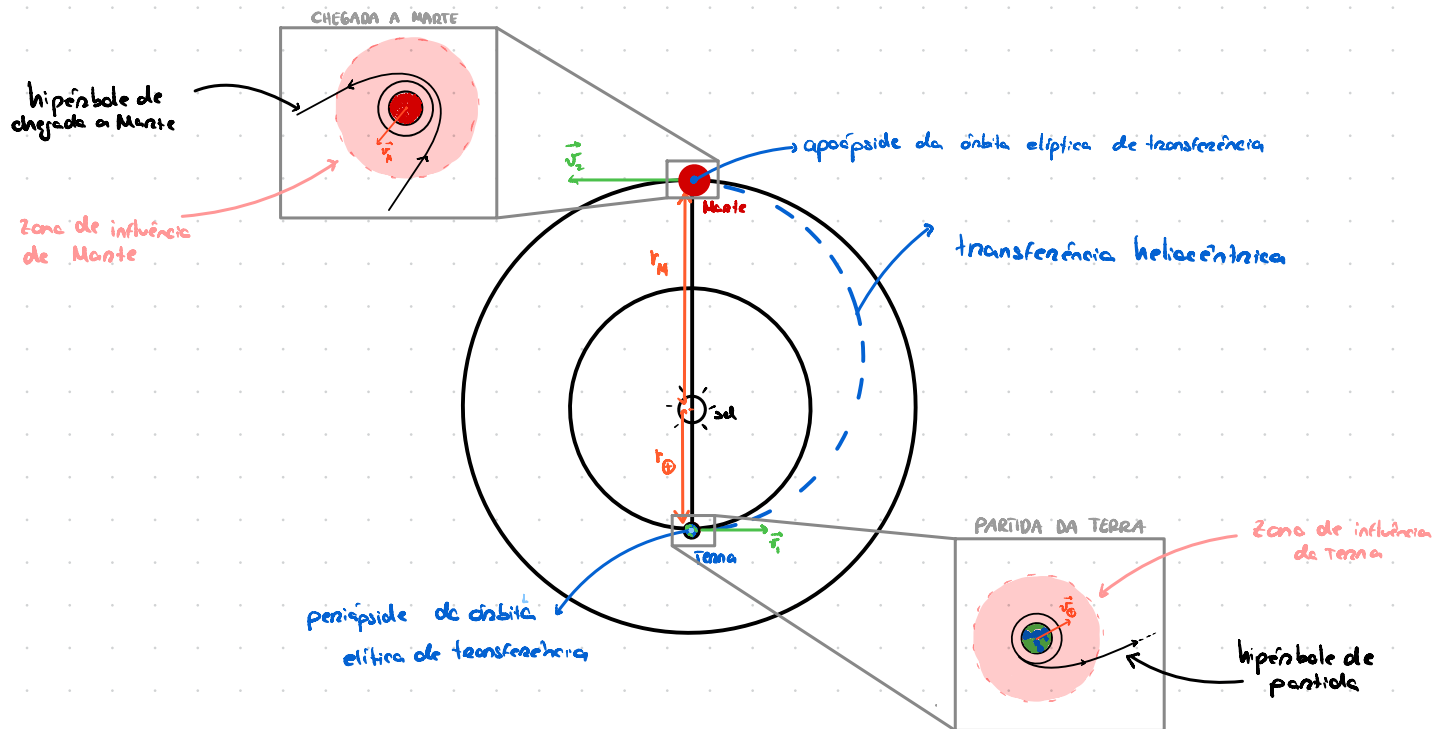
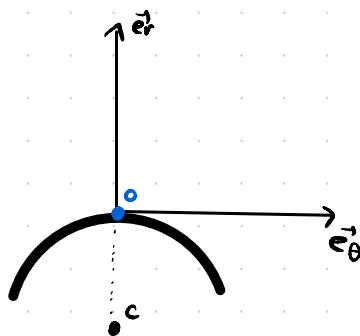


IMAGEM
CHEGADA

De acordo com os dados do enunciado, podemos representar o problema da seguinte forma:



Neste problema, vamos utilizar o referencial $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\theta$. Em cada ponto, $\vec{e}_\theta$, tem direção tangente à circunferência e $\vec{e}_r$ será perpendicular a $\vec{e}_\theta$ como demonstrado seguidamente:



- a) Tal como para o caso da Terra, a órbita de Marte é aproximadamente circular. Deste modo, podemos concluir que o parâmetro do semi-eixo maior e o raio de Marte são iguais, logo $a_{\text{Marte}} = r_{\text{Marte}} = 1.52 \text{ u.a.}$ (unidades astronômicas). Para calcular o período orbital de Marte vamos recorrer à seguinte fórmula da Formulario (usando a notação de "M" como se referindo a Marte):

$$(10) \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2}} \quad (r_M = a_M) \quad T_{\text{Marte}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_0}} \cdot (r_M)^{3/2} = \frac{2\pi \times (1.52 \times 1496 \times 10^6 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{1.327 \times 10^{20} \text{ km}^3/\text{s}^2}} = 59143521.44 \text{ s} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{T_{\text{Marte}} = 5.9144 \times 10^7 \text{ s} = 684.53 \text{ dias solares médios}}$$

Considerando também a segunda lei de Newton e a fórmula da gravitação universal:

$$(11) \quad \boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

2ª LEI DE NEWTON

$$(12) \quad \boxed{\vec{F}(r) = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \vec{e}_r}$$

FÓRMULA DA GRAVITAÇÃO
UNIVERSAL

Ao igualarmos (11) a (12) e substituindo a aceleração pela expressão da aceleração centrípeta $a_c = \frac{v^2}{r}$, podemos obter uma equação que nos permite obter a velocidade para órbitas circulares onde o parâmetro gravitacional é dado por $\mu = m \cdot G$:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (13) \quad m_2 \cdot \vec{a} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \quad (1) \quad m_2 \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{m_1 \cdot G}{r}} \quad (3) \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}} \quad (13) \quad \text{VELOCIDADE ÓRBITA CIRCULAR}$$

Deste modo, a velocidade de Marte medida no referencial fixo com o sol é dada por:

$$v_M = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_M}} = \sqrt{\frac{1.329 \times 10^{11} \text{ km}^2/\text{s}^2}{1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}} = 24.15727099 \text{ km/s} \Rightarrow \underline{v_M = 24.157 \text{ km/s}}$$

↑ direção e sentido de $\vec{v}$ relativ. ao sol

b) Pretende-se utilizar uma órbita heliocêntrica que minimize o gasto de propelente. Como verificada no primeiro projeto, a transferência mais eficiente para este caso é a transferência de Hohmann, como já se encontra explícito na imagem da transferência interplanetária em si.

i) De acordo com as fórmulas da energia podemos, recorrendo a um balanço de energia, obter a equação vis-viva, que vai ser útil neste problema.

(14) $T(r) = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{2r}$

ENERGIA CINÉTICA

(15) $V(r) = -\frac{\mu}{r}$

ENERGIA POTENCIAL

(16) $E = T(r) + V(r) = \frac{-\mu}{2a}$

$\mathcal{E} = T(r) + V(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{-\mu}{2a}$

BALANÇO DE ENERGIA

$\Rightarrow v^2 = 2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$

$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}} \quad (17)$

EQUAÇÃO VIS-VIVA

Utilizando a equação vis-viva (17) podemos calcular a velocidade da sonda na órbita de transferência heliocêntrica na partida, relativamente ao sol ($v_{H\text{partida}}$). Para isso é necessário também calcular o semi-eixo maior, a , da órbita de transferência, sendo que este é dado pela seguinte expressão, visto que se trata de uma transferência de Hohmann:

(18) $\boxed{a_H = \frac{r_\oplus + r_M}{2}} = \frac{(1 + 1.52) \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}{2} = 188496000 \text{ km}$

Assim:

$$v_{H \text{ partida}} = \sqrt{2 \mu_0 \left(\frac{1}{r_{\oplus}} - \frac{1}{2a_H} \right)} = \sqrt{2 \times 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2 \left(\frac{1}{1.496 \times 10^8 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 188496000 \text{ km}} \right)} =$$

$$= 32.71193135 \text{ km/s}$$

A velocidade da Terra, relativamente ao sol, representada por $v_{\oplus}$ é dada pela fórmula da velocidade para órbitas circulares (13):

$$v_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}{1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}} = 29.78308388 \text{ km/s}$$

Quando a sonda sai da zona de influência da Terra, considera-se que esta já está em infinito relativamente à Terra, com velocidade v_{∞} . Assim, a velocidade da sonda na hipérbole de escape, calculada anteriormente para a partida da Terra, resulta da soma da velocidade v_{∞} com a velocidade da Terra em relação ao Sol:



Deste modo, a velocidade da sonda, relativamente à Terra, com que esta tem de partir da zona de influência é dada por (Nota: o índice superior "s" irá referir-se daqui em diante à órbita de partida):

$$v_{H \text{ partida}} = v_{\infty}^s + v_{\oplus} \Rightarrow v_{\infty}^s = v_{H \text{ partida}} - v_{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{\infty}^s = 32.71193135 \text{ km/s} - 29.78308388 \text{ km/s} = 2.928847467 \text{ km/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{v_{\infty}^s = 2.9288 \text{ km/s}}$$



Na que toca à direção e ao sentido, esta tem a mesma direção e sentido que a velocidade da Terra, como exemplificado na IMAGEM DA PARTIDA e na imagem anterior com a representação das 3 velocidades.

ii) Como Marte não se encontrasse no ponto da órbita pretendida no final da viagem da sonda, esta, para se resolver o problema, teria de entrar na mesma órbita heliocêntrica que Marte, na qual a sua velocidade seria igual à velocidade de Marte em relação ao sol. Para isto é necessário um determinado Δv que permita a sonda obter esta velocidade:

$$v_M = v_{H_{\text{chegada}}} + \Delta v \longrightarrow \text{variação de velocidade necessária}$$

v_M → velocidade de Marte em relação ao Sol
 $v_{H_{\text{chegada}}}$ → velocidade heliocêntrica da sonda na chegada

Podemos obter a velocidade heliocêntrica da sonda na chegada a Marte, $v_{H_{\text{chegada}}}$, recorrendo novamente à equação Vis-Viva (17):

$$v_{H_{\text{chegada}}} = \sqrt{2\mu_0 \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{2a_H} \right)} = \sqrt{2 \times 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^2/\text{s}^2 \left(\frac{1}{1.52 \times 1.416 \times 10^8 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 186496000 \text{ km}} \right)} =$$

$$= 21.52100746 \text{ km/s}$$

Com este valor e com a velocidade de Marte em relação ao Sol, calculada na alínea a), podemos finalmente obter o valor da variação de velocidade necessária:

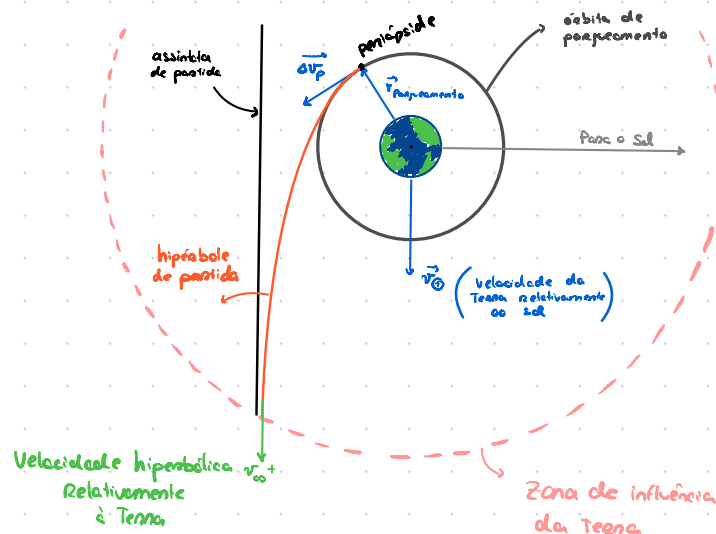
$$\Delta v = v_M - v_{H_{\text{chegada}}} = 24.15727097 \text{ km/s} - 21.52100746 \text{ km/s} = 2.636263506 \text{ km/s} \approx 0$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta v = 2.6363 \text{ km/s}}$$

c) Para o valor de $X = 0.710$, temos o seguinte valor para o raio da órbita de perigeísmo:

$$r_p = (1.1 + 0.710) R_E = (1.1 + 0.710) \times 6378 \text{ km} = 11544.18 \text{ km}$$

i) Recorrendo novamente à imagem de partida referente à fase da partida:



Em condições ideais, a velocidade da hipérbole de partida, relativamente à Terra, tem a mesma direção e sentido que a velocidade da Terra em relação ao Sol.

Admitindo que a sonda parte de órbita circular de perigeísmo de raio $r_p = 11544.18 \text{ km}$, a sua velocidade nesse órbita, v_c^+ , é dada por (13):

$$v_c^+ = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_p}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{11544.18 \text{ km}}} = 5.836071915 \text{ km/s}$$

A necessária para a sonda escapar da zona de influência da Terra, calculada em b) i), corresponde à velocidade da órbita hipérbólica de partida para $r \rightarrow \infty$, obtida através da equação vis-viva. Recorrendo a esta, podemos calcular o valor do semi-eixo maior, a^+ , da órbita hipérbólica de partida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v^+(r \rightarrow \infty) &= \sqrt{2\mu_\oplus \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a^+} \right)} \Rightarrow v_\infty^+ = \sqrt{\frac{-\mu_\oplus}{a^+}} \quad \Leftrightarrow \quad a^+ = \frac{-\mu_\oplus}{(v_\infty^+)^2} = \quad \text{---} \quad (v_\infty^+ = 2.928843463 \text{ km/s}) \\ &= - \frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(2.928843463 \text{ km/s})^2} \Rightarrow a^+ = -46466.90917 \text{ km} \end{aligned}$$

Nesta transferência, a sonda parte do perigeísmo da órbita hipérbólica. Deste modo, a velocidade da sonda nesse ponto, v_h^+ , é dada pela equação vis-viva.

$$\begin{aligned} v_h^+ &= \sqrt{2\mu_\oplus \left(\frac{1}{\underset{\text{enunciado}}{r_p}} - \frac{1}{2a^+} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{11544.18 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times (-46466.90917 \text{ km})} \right)} \\ \Rightarrow v_h^+ &= 8.811049301 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Deste modo, a variação necessária Δv que a sonda deve fornecer para entrar numa órbita hipérbólica que a leve ao destino, nestas condições, resulta da subtração entre a velocidade da órbita hipérbólica pretendida com a velocidade

Assim, a variação de velocidade necessária Δv somada do módulo da velocidade da sonda no ponto de partida (na órbita de perigeísmo) resulta no valor da velocidade da sonda na órbita hipérbólica que a leva ao destino pretendido. Com isto, calculamos Δv da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v_h^+ &= v_c^+ + \Delta v \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta v &= v_h^+ - v_c^+ = 8.811049301 \text{ km/s} - 5.836071915 \text{ km/s} = 2.974977386 \text{ km/s} \\ \Rightarrow \Delta v &= \underline{2.9350 \text{ km/s}} \end{aligned}$$

direção e sentido de acordo com $\vec{v}_p$ representado na imagem

ii) Da linha anterior obtemos o parâmetro a^+ , que corresponde ao semi-eixo maior da órbita hiperbólica em estudo:

$$\underline{a^+ = -46467 \text{ km}}$$

Na periépside da mesma, temos que a anomalia verdadeira é $\theta = 0^\circ$.

Recomendo ao formulário, podemos obter a excentricidade pedida, e^+ , através da equação de órbita

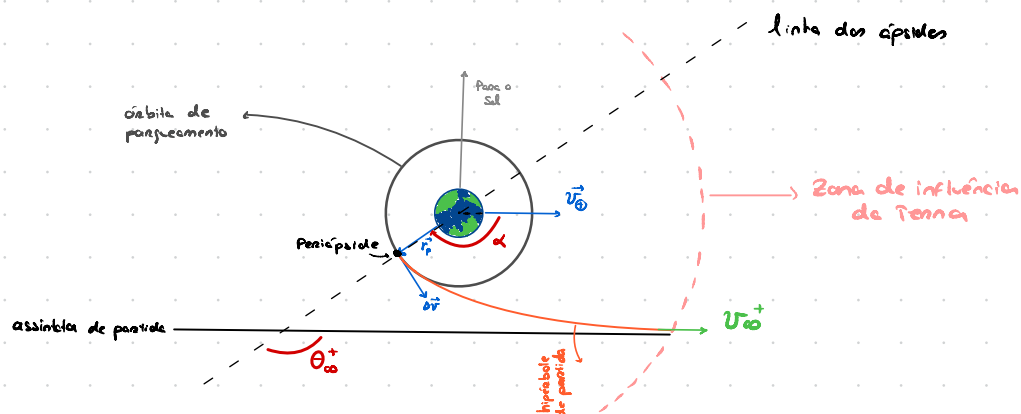
$$\left. \begin{array}{l} (19) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ (20) \quad p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu} \end{array} \right\} (21) \quad \boxed{r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}} \quad \text{EQUAÇÃO DE ÓRBITA}$$

$$(21) \quad \theta = 0^\circ \Rightarrow r_p = \frac{a^+(1 - e^{+2})}{1 + e^+ \cos 0^\circ} = a^+(1 - e^+) \quad (\Leftarrow)$$

$$\Leftrightarrow e^+ = 1 - \frac{r_p}{a^+} = 1 - \frac{11544.18 \text{ km}}{-46466.90917 \text{ km}} = 1.248438932 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{e^+ = 1.2484} > 1, \text{ de acordo com os valores para a excentricidade de órbitas hiperbólicas}$$

iii) Pretendemos calcular o ângulo entre a direção da velocidade da Terra relativamente ao Sol, $\vec{v}_0$, e a linha que une o centro da Terra ao ponto onde se dá o impulso Δv , linha esta que corresponde à linha dos ápseis, visto que o impulso dá-se na periépside, como demonstrado no seguinte desenho:



Neste, o ângulo que pretendemos calcular é igual ao ângulo θ_∞^+ que, por sua vez, corresponde ao ângulo entre a assíntota de partida e a linha dos ápseis. Deste modo, para obtermos o valor de α basta calcularmos o valor de θ_∞^+ .

Para o cálculo de Θ_{∞}^+ , consideramos a sonda com uma distância a tender para infinito, $r \rightarrow \infty$. Assim, recorrendo à equação de órbita (21) e com esta consideração podemos obter o valor do ângulo da seguinte maneira:

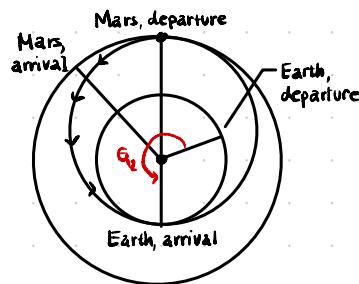
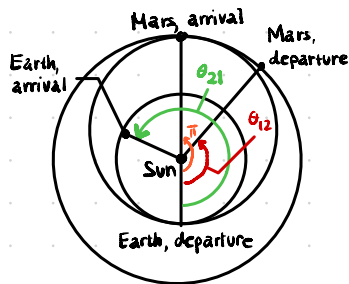
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (\Rightarrow) \quad \cos \theta = \frac{a(1 - e^2)}{er} - \frac{1}{e} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{a(1 - e^2)}{re} - \frac{1}{e} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta_{\infty}^+ = \arccos \left(\frac{a^+ (1 - e^{+2})}{r_{(-\infty)} \cdot e^+} - \frac{1}{e^+} \right) = \arccos \left(\frac{-1}{e^+} \right) = \arccos \left(\frac{-1}{1.248438732} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta_{\infty}^+ = 143.2257458^\circ = 2.499760838 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = 143.23^\circ = 2.4998 \text{ rad}}$$

d) Nesta questão, vamos recorrer à seguinte imagem das aulas teóricas, como auxílio à resolução do problema:



i) Vamos admitir que a sonda parte de um certo ponto da Terra num determinado instante e que no fim da sua deslocação, através da transferência de Hohmann, esta chega em Marte após um tempo de viagem, t_v , avançando um ângulo heliocêntrico π rad.

Nesta imagem temos que no momento da partida, temos que a Terra e Marte fazem um ângulo heliocêntrico que corresponde a θ_{12} , onde:

$$(22) \quad \pi - \theta_{12} = n_M \cdot t_v$$

Nesta expressão temos presente n_M , que corresponde à frequência de revolução de Marte em torno do Sol:

$$(23) \quad n_M = \frac{2\pi}{T_M}$$

Estas considerações são importantes pois, para Marte se encontrar no apogeu da órbita elítica heliocêntrica de transferência no fim do tempo de viagem da sonda, este tem de avançar um determinado ângulo dado pela subtração $\pi - \theta_{12}$. Semelhante a este, a Terra também avança um ângulo θ_{21} desde a partida até a sonda chegar a Marte; ângulos estes que temos de ter em conta neste problema.

De acordo com o formulário, temos a seguinte fórmula que nos permite calcular a frequência de revolução de Marte à volta do Sol:

(24) $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ $\rightarrow$ a órbita heliocêntrica de Marte é circular, logo, na expressão, $a_M = r_M \Rightarrow$

$$\Rightarrow n_M = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_M^3}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}}{(1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km})^3} = 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Como a órbita heliocêntrica da viagem interplanetar é uma transferência de Hohmann, então o período da mesma é dado por (10):

apenas se percorre meia elipse

calculado em b)

$$T_v = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_0}} a_H^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_0}} a_H^{3/2} = \frac{\pi \times (188496000 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}} =$$

$$\Rightarrow T_v = 22318634.46 \text{ s}$$

Com estes valores podemos finalmente obter o valor do ângulo heliocêntrico pretendido, G_{12} :

$$\pi - G_{12} = n_M \cdot t_v \Rightarrow G_{12} = \pi - n_M \cdot t_v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_{12} = \pi - 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \times (22318634.46 \text{ s}) = 0.770544858 \text{ rad} = 44.14896833^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{G_{12} = 0.77054 \text{ rad} = 44.149^\circ}$$

ii) Para lançar, novamente, a sonda da Terra basta que o ângulo heliocêntrico se repita, logo, o intervalo de tempo necessário para o novo lançamento corresponde ao período sinódico entre a Terra e Marte.

Calculando as frequências angulares de Terra e Marte em torno do Sol, temos, por (24):

$$n_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}^3}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}}{(1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km})^3} = 1.990847853 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$n = 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \quad (\text{obtido em i)})$$

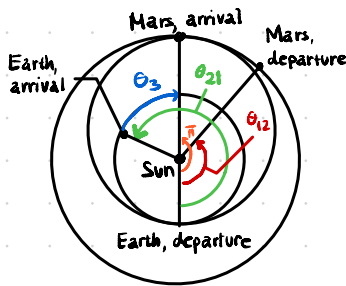
Sendo o período sinódico dado por $T_{\text{sinódica}} = \frac{2\pi}{n_3}$, onde n_3 corresponde à diferença entre $n_{\oplus}$ e n_M , obtemos:

$$T_{\text{sinódica}} = \frac{2\pi}{n_{\oplus} - n_M} = \frac{2\pi}{1.990847853 \times 10^3 \text{ rad/s} - 1.062362395 \times 10^3 \text{ rad/s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{sinódica}} = 67691337.78 \text{ s} = 783.2330761 \text{ dias solares médios}$$

$$\Rightarrow T_{\text{sinódica}} = 6.7691 \times 10^7 \text{ s} = 783.23 \text{ dias solares médios}$$

iii) Como vimos anteriormente, após a sonda dar início à sua viagem a Terra vai percorrer um determinado ângulo, representado por θ_{21} , até a sonda aterrissar em Marte. No fim da viagem, tem-se que a sonda avançou um ângulo de $\pi \text{ rad}$. Desta modo, podemos ver que o ângulo heliocêntrico entre a Terra e Marte, quando a sonda chega a Marte é designado de θ_3 e dado por:



De acordo com o sentido dos ângulos na imagem:

$$\theta_3 = \theta_M (\text{à chegada}) - \theta_{\oplus} (\text{à chegada}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_3 = \pi - \theta_{21}} \quad (25)$$

Para obter o valor do ângulo θ_{21} que a Terra percorreu, vamos recorrer à mesma fórmula utilizada para Marte na alínea i). Semelhante a (22), o ângulo que a Terra avançou durante o tempo da viagem é dado por:

$$(26) \quad \boxed{\theta_{21} = n_{\oplus} \cdot t_v}$$

Recomendo os seguintes valores, calculados em alíneas anteriores, obtêm-se:

$$n_{\oplus} = 1.990847853 \times 10^3 \text{ rad/s} \rightarrow \text{alínea ii)}$$

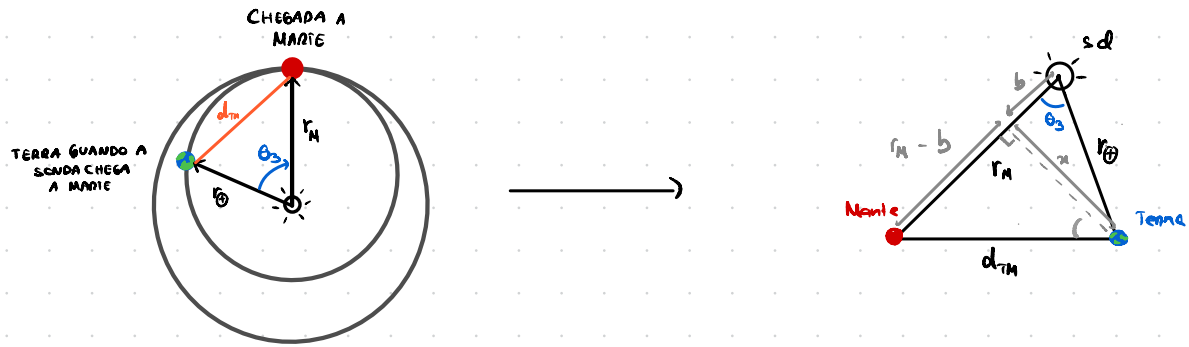
$$T_v = 22318634.46 \text{ s} \rightarrow \text{alínea i)}$$

$$\theta_{21} = n_{\oplus} \cdot t_v = 1.990847853 \times 10^3 \text{ rad/s} \times 22318634.46 \text{ s} = 4.44330055 \text{ rad.}$$

Com este, podemos calcular o ângulo entre Terra e Marte à chegada:

$$\theta_3 = \pi - \theta_{21} = \pi - 4.44330055 \text{ rad} = -1.301712846 \text{ rad}$$

Na chegada da Sonda a Marte temos então que a Terra e Marte fazem um ângulo heliocêntrico, Θ_3 , e as distâncias entre estes e o Sol podem ser representadas da seguinte forma:



Deste modo, temos tudo o que precisamos para calcular a distância de Terra a Marte na chegada da sonda, d_{TM} :

→ valor em módulo

$$x = r_{\oplus} \times \sin \Theta_3 = 1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km} \times \sin(1.301712846 \text{ rad}) = 144216637.4 \text{ km}$$

$$b = r_{\oplus} \cdot \cos \Theta_3 = 1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km} \times \cos(1.301712846 \text{ rad}) = 39770862.33 \text{ km}$$

$$(d_{MT})^2 = x^2 + (r_M - y)^2 \Rightarrow d_{MT} = \sqrt{x^2 + (r_M - b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{MT} = \sqrt{(144216637.4 \text{ km})^2 + (1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km} - 39770862.33 \text{ km})^2} = 236643465.6 \text{ km}$$

Por fim, para calcularmos o tempo que as comunicações da Terra demoram a chegar à sonda quando esta chega a Marte, basta recorrermos à velocidade da luz, cujo valor vamos considerar, $c = 299792458 \text{ m/s}$:

$$c = \frac{d_{TM}}{\Delta t_{\text{comunicação}}} \quad (\Rightarrow) \quad \Delta t_{\text{comunicação}} = \frac{d_{TM}}{c} = \frac{236643465.6 \times 10^3 \text{ m}}{299792458 \text{ m/s}} = 789.3576348 \text{ s} = 13.15596098 \text{ min}$$

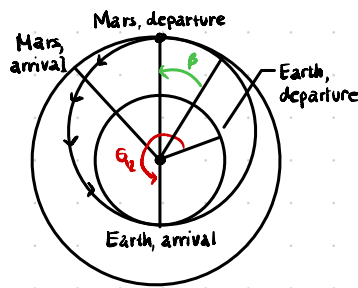
$$\Rightarrow \underline{\Delta t_{\text{comunicação}} = 789.36 \text{ s} = 13.156 \text{ min}} \quad (\text{tempo que as comunicações da Terra demoram a chegar à sonda quando esta chega a Marte})$$

iv) Primeiramente, o tempo que a tripulação demora desde a partida da Terra até chegar a Marte corresponde ao tempo da respetiva transferência de Hohmann, já calculado em i):

$$T_H^{ii} = 22318634.46 \text{ s} = 258.3175285 \text{ dias solares médios}$$

$$\underline{T_H = 2.2319 \times 10^7 \text{ s} = 258.32 \text{ dias solares médios}}$$

Pretende-se que a sonda regressasse à Terra numa órbita idêntica à de ida a Marte e com o mesmo tempo de viagem, T_H . Para isto é necessário que a Terra esteja num ângulo Θ_2 para trás do ponto de chegada:



Durante o tempo de espera, t_e , Marte percorre um determinado ângulo β , definido por $\beta = n_M \cdot t_e$, ao mesmo tempo que a Terra percorre um ângulo, para ambos se posicionarem para a partida da sonda. A Terra precisa de se encontrar a um ângulo θ_{21} antes da posição "Earth, arrival". Assim, durante o tempo de espera a terra tem de avançar o seguinte ângulo:

$$2\pi - 2(\theta_{21} - \pi) + \beta = 4\pi - 2\theta_{21} + n_M t_e = n_\oplus \cdot t_e \quad (27)$$

Assim, o tempo de espera é, que corresponde ao tempo mínimo para que se possa realizar a viagem novamente perante estas condições e órbitas de transferência é:

$$(28) \quad t_e = \frac{4\pi - 2\theta_{21}}{n_\oplus - n_M}$$

$$t_e \text{ (minimo)} = \frac{4\pi - 2\theta_{21}}{n_\oplus - n_M} = \frac{4\pi - 2 \times 4.44330055 \text{ rad}}{1.990847853 \times 10^{-3} \text{ rad/s} - 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s}} =$$

$$\Rightarrow t_e \text{ (min)} = 39631957.43 \text{ s} = 458.703211 \text{ dias s.m.}$$

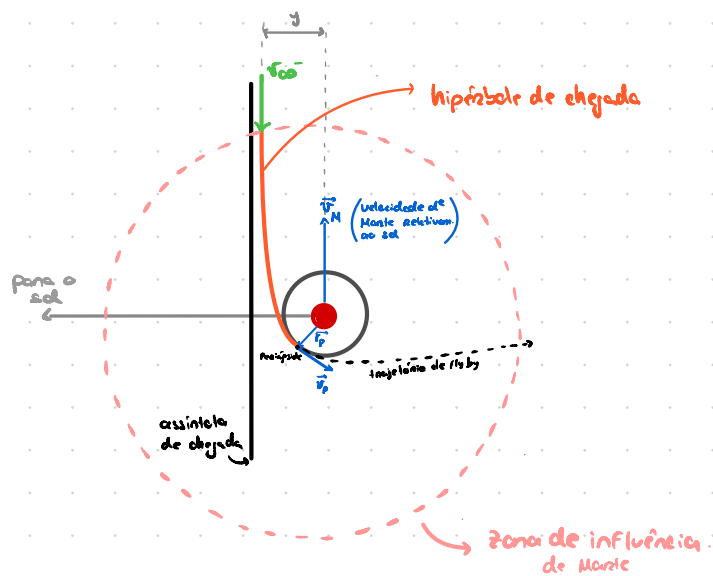
$$\Rightarrow \underline{t_e \text{ (min.)} = 3.9632 \times 10^7 \text{ s} = 458.70 \text{ dias solares médios}}$$

A duração total da missão nestas condições ideais e com tempo mínimo de espera é dada pela soma do tempo das viagens (que é igual) com t_e :

$$\Delta t_{\text{viagem total}} = 2t_v + t_e = 2 \times 22318634.46 \text{ s} + 39631957.43 \text{ s} = 84269226.35 \text{ s} = 975.3382679 \text{ d.s.m.}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta t_{\text{viagem total}} = 8.4269 \times 10^7 \text{ s} = 975.34 \text{ dias solares médios}}$$

e) Recomenda novamente a imagem referente à fase da chegada:



i) Podemos observar que a velocidade da sonda relativamente ao planeta, na assíntota hiperbólica de chegada, $\vec{v}_{H \text{ chegada}}$ (calculada anteriormente), resulta da soma vetorial entre a velocidade heliocêntrica da sonda à chegada, $\vec{v}_{\infty}^{-}$, com a velocidade de Marte (valores estes já calculados). Assim, temos:

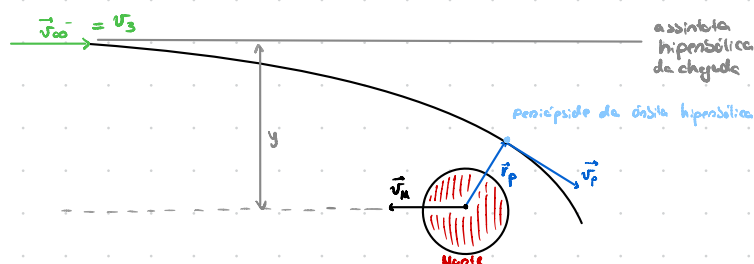
$$(29) \quad \vec{v}_{H \text{ chegada}} = \vec{v}_{\infty}^{-} + \vec{v}_M$$

Assim:

$$v_{\infty}^{-} = v_{H \text{ chegada}} - v_M = 21.52100746 \text{ km/s} - 24.15727097 \text{ km/s} = -2.63626351 \text{ km/s}$$

$$\Rightarrow \underline{|v_{\infty}^{-}| = 2.6363 \text{ km/s}} \rightarrow \text{com sentido e direção de } \vec{v}_M$$

$$\text{ii) Para } x = 0.31 \text{ temos: } y = (9000 + 1000 \times 0.31) = 9310 \text{ km.}$$



Da conservação do momento angular $\vec{h}$, $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$, temos que o momento angular da sonda, imediatamente antes de entrar na zona de influência de Marte (para uma distância y), é igual ao momento angular da sonda no pericélio da órbita hiperbólica de chegada. Como, para ambos os casos, as velocidades são perpendiculares, temos:

$$\underbrace{y \cdot v_{\infty}^{-}}_{\text{conservação momento angular}} = r_p \cdot v_p \Rightarrow \boxed{r_p = \frac{y \cdot v_{\infty}^{-}}{v_p}} \quad (30)$$

Com esta expressão, verificamos que y determina o raio da perigeu da órbita. Para determinar o valor de r_p , precisamos de uma expressão para v_p , logo vamos fazer um balanço energético entre o ponto imediatamente antes de sonda entrar na zona de influência de Marte, para v_{∞^-} , (onde consideramos infinito $\Rightarrow U(r) = 0$) e o ponto da perigeu, Com (14) e (15):

$$T(r \rightarrow \infty) + U(r \rightarrow \infty) = T(r_p) + U(r_p) \Rightarrow \frac{v_{\infty^-}^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_H}{r_p} \quad (31)$$

Substituindo (30) em (31) temos:

$$\frac{v_{\infty^-}^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_H}{r_p} \Leftrightarrow \frac{v_{\infty^-}^2}{2} - \frac{v_p^2}{2} + \frac{\mu_H}{y \cdot v_{\infty^-}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_p^2 - v_p \cdot \frac{2 \cdot \mu_H}{y \cdot v_{\infty^-}} - (v_{\infty^-})^2 = 0 \quad \text{eq. 2ª grau} \quad \Leftrightarrow v_p = \frac{\mu_H}{y \cdot v_{\infty^-}} \pm \sqrt{\left(\frac{-\mu_H}{y \cdot v_{\infty^-}}\right)^2 + (v_{\infty^-})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{4.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2}{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})} \pm \sqrt{\left(\frac{4.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2}{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})}\right)^2 + (2.63626351 \text{ km/s})^2} =$$

$$\Rightarrow v_{p\oplus} = 4.795473969 \text{ km/s} \quad \vee \quad v_{p\ominus} = -3.122366623 \text{ km/s}$$

Precisamos de obter o valor de r_p para averiguar qual o valor verdadeiro para ambos:

$$\begin{cases} v_{p\oplus} = -3.122366623 \text{ km/s} \\ r_{p\oplus} = \frac{y \cdot v_{\infty^-}}{v_{p\oplus}} = \frac{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})}{(-3.122366623 \text{ km/s})} < 0 \text{ impossível, logo } v_p \text{ é:} \end{cases}$$

$$v_p = 4.795473969 \text{ km/s}$$

$$r_p = \frac{y \cdot v_{\infty^-}}{v_{p\oplus}} = \frac{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})}{(4.795473969 \text{ km/s})} = 5337.974692 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \underline{r_p = 5338.0 \text{ km}}$$

Recomendo a seguinte fórmula da Formulario, podemos com r_p e v_p calcular o parâmetro pedido, a , o semi-eixo maior, para a órbita hipérbolica na fase da chegada:

$$(32) \quad a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}}$$

$$\Rightarrow a^- = \frac{r_p}{2 - \frac{r_p \cdot v_p^2}{\mu_M}} = \frac{5337.974692 \text{ km}}{2 - \frac{(5337.974692 \text{ km}) \times (2.63626351 \text{ km/s})^2}{4.795473969 \text{ km/s}^2}} = -3684.195802 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \underline{a^- = -3684.2 \text{ km}}$$

Recomendo a equação de órbita, podemos obter o valor para a excentricidade, e^- :

Perigeu: $\theta = 0^\circ$

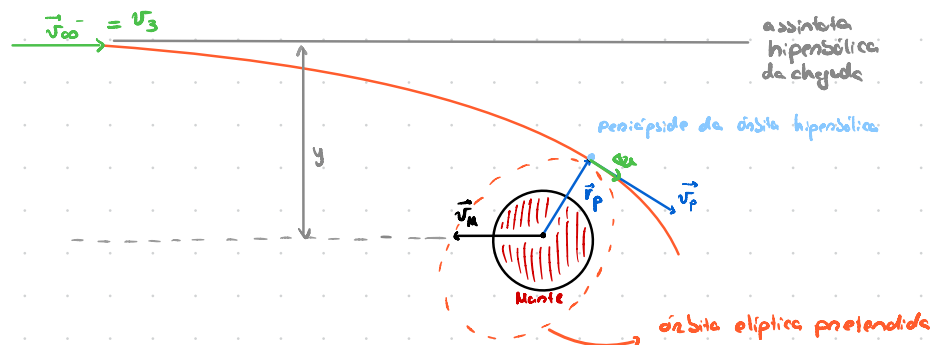
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r_p = \frac{a^-(1-e^{-2})}{1+e^-} = a^-(1-e^-) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^- = 1 - \frac{r_p}{a^-} = 1 - \frac{5337.974692 \text{ km}}{-3684.195802 \text{ km}} = 2.44884636 > 1 \text{ Como esperado visto a órbita ser hipérbólica.}$$

$$\Rightarrow \underline{e^- = 2.4489}$$

iii) Para $X = 0.71$ temos: $T_c = (80000 + 10000 \times 0.71) = 87100 \text{ s}$

Nesta alínea temos que a sonda sofre um impulso, ou, na periépside da nova órbita elíptica, em torno de Marte, de período T_c , na qual se pretende colocar a sonda:



Com o valor do período da órbita e recomendando a equação (10), podemos obter o valor para o seu semi-eixo maior:

$$T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_M}} \cdot a^{3/2} \Leftrightarrow a = \left(\frac{T_c \cdot \sqrt{\mu_M}}{2\pi} \right)^{2/3} = \left(\frac{87100 \text{ s} \cdot \sqrt{4.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2}}{2\pi} \right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow a = 13401.02372 \text{ km}$$

Antes da sonda passar a orbitar em torno de Marte segundo esta órbita elíptica, esta encontrava-se numa órbita hipérbólica, sendo que no periépside desta, a velocidade da sonda é $v_p = 4.795473969 \text{ km/s}$ (calculada em ii).

Como podemos observar pela figura, ambas as órbitas hipérbólica e elíptica partilham do mesmo valor para o raio do periépside, $r_{\text{periépside, elíptica}} = r_p = 5337.974692 \text{ km}$ (também calculado em ii). Consequentemente, ambas as velocidades da sonda no periépside destas órbitas terão a mesma direção (são colineares), por isso temos a seguinte expressão para o impulso necessário para esta passagem da órbita hipérbólica para a elíptica:

Na imagem tem-se representado Θ_{∞}^{-} , que consiste no ângulo entre a assíntota hiperbólica e a linha dos eípsides. Como visto para Θ_{∞}^{+} , anteriormente, reccorrendo à equação de órbita temos:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow 1+e\cos\Theta_{\infty}^{-} = 0 \Rightarrow \Theta_{\infty}^{-} = \arccos\left(\frac{-1}{e}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2.448284636}\right) =$$

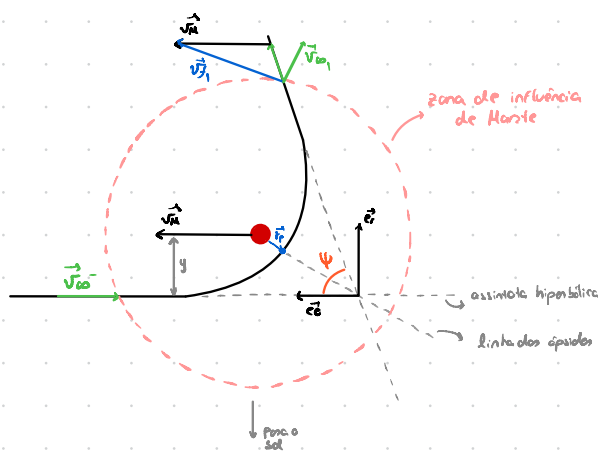
(r → ∞) (e) ii)

$$\Rightarrow \Theta_{\infty}^{-} = 1.991441169 \text{ rad} = 114.1011741^{\circ}$$

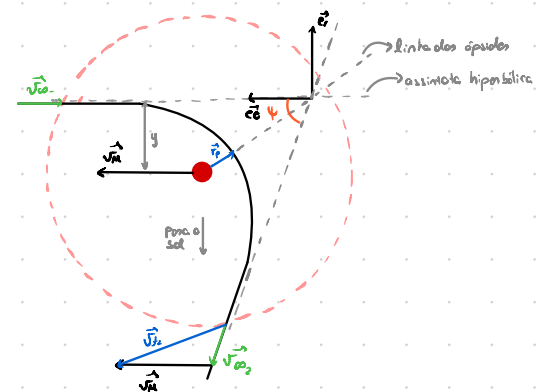
Analisando a direcção de $\vec{v}_{\infty}^{-}$, observamos que este faz um ângulo ψ com $\vec{v}_{\infty}^{-}$ dada por:

$$\psi = 2\pi - 2\Theta_{\infty}^{-} = 2\pi - 2 \times 1.991441169 \text{ rad} = 2.300302969 \text{ rad} = 131.7576517^{\circ}$$

A manobra de fly-by tem 2 casos distintos, para 2 órbitas hiperbólicas simétricas como demonstram as seguintes figuras:



Caso 1: sonda afasta-se do Sol



Caso 2: sonda aproxima-se do Sol

Assim, os dois valores possíveis para $\vec{v}_{\infty}$ são descritos da seguinte forma, considerando o referencial $\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}$ e $|\vec{v}_{\infty 1}| = |\vec{v}_{\infty 2}| = v_{\infty}$:

$$\vec{v}_{\infty 1} = (v_{\infty} \cdot \sin \psi) \vec{e}_r + (v_{\infty} \cdot \cos \psi) \vec{e}_{\theta} \quad (\text{km/s})$$

$$\vec{v}_{\infty 2} = -(v_{\infty} \cdot \sin \psi) \vec{e}_r + (v_{\infty} \cdot \cos \psi) \vec{e}_{\theta} \quad (\text{km/s})$$

Como representado nas imagens, para a manobra de fly by, a velocidade final é dada pela soma vetorial da respetiva velocidade hiperbólica, imediatamente após a zona sem da zona de influência de Marte, com a velocidade de Marte:

$$(34) \quad \boxed{\vec{v}_f = \vec{v}_{\infty} + \vec{v}_M}$$

Recomendo ao valor da velocidade de Monte (calculada em a)) e ao valor de v_{∞} mencionado na início desta alínea temos:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{f_1} &= (v_{\infty} \cdot \sin \psi) \vec{e}_r + (v_{\infty} \cdot \cos \psi) \vec{e}_{\theta} + v_M \vec{e}_c = \\ &= v_{\infty} (\sin \psi \vec{e}_r + \cos \psi \vec{e}_{\theta}) + v_M \vec{e}_c = \\ &= 2.63626351 \text{ km/s} (\sin(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_r + \cos(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_{\theta}) + 24.15727097 \vec{e}_c \text{ km/s} = \\ &= 1.965343184 \vec{e}_r + 22.40019629 \vec{e}_{\theta} \text{ (km/s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{f_2} &= -(v_{\infty} \cdot \sin \psi) \vec{e}_r + (v_{\infty} \cdot \cos \psi) \vec{e}_{\theta} + v_M \vec{e}_c = \\ &= -v_{\infty} (\sin \psi \vec{e}_r + \cos \psi \vec{e}_{\theta}) + v_M \vec{e}_c = \\ &= 2.63626351 \text{ km/s} (-\sin(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_r + \cos(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_{\theta}) + 24.15727097 \vec{e}_c \text{ km/s} = \\ &= -1.965343184 \vec{e}_r + 22.40019629 \vec{e}_{\theta} \text{ (km/s)}\end{aligned}$$

$$|\vec{v}_{f_1}| = |\vec{v}_{f_2}| = \sqrt{(1.965343184)^2 + (22.40019629)^2} = 22.48624841 \text{ km/s}$$

Assim, podemos definir a velocidade final da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{v}_f = \pm 1.9653 \vec{e}_r + 22.400 \vec{e}_{\theta} \text{ (km/s)} \\ |\vec{v}_f| = 22.486 \text{ km/s} \end{cases}$$

③

a) Os ângulos de Euler descrevem 3 rotações sucessivas, em torno dos mesmos eixos coordenados instantâneos, que transformam o referencial de inércia (ex: XYZ), no referencial que roda (ex: $x_2 y_2 z_2$). Estes permitem-nos, então, saber a orientação do referencial em rotação, isto é, a orientação do corpo. Os ângulos de Euler são:

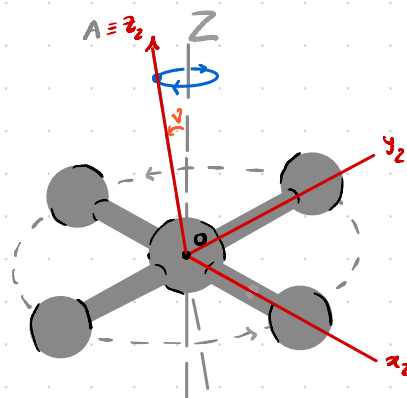
ψ : ângulo de precessão

ν : ângulo de nutação

σ : ângulo de rotação própria

As respectivas frequências de Euler representam-se por: $\dot{\psi}$, $\dot{\nu}$ e $\dot{\sigma}$.

i) De acordo com os dados da enunciado temos a seguinte imagem que descreve o problema:



No enunciado já nos foi fornecido o valor da frequência de Euler $\dot{\sigma} = (3 + 0.710) = 3.710 \text{ rev/min}$. Também nos foi dito que o ângulo de nutação, ψ , é muito pequeno, logo, podemos aproximar o cosseno deste ângulo a 1 (vamos precisar disto para calcular $\dot{\psi}$).

Como a rotação espacial é assimétrica (como se pode observar pela figura), temos que $\dot{\psi} = \text{constante}$. Deste modo já temos o valor para os seguintes frequências de Euler:

$$\dot{\sigma} = 3.710 \text{ rev/min} = \frac{3.710 \cdot 2\pi}{60} = 0.388510291 \text{ rad/s} \Rightarrow \underline{\dot{\sigma} = 0.38851 \text{ rad/s}}$$

$$\text{estação assimétrica} \Rightarrow \dot{\psi} = \text{constante} \Rightarrow \underline{\dot{\psi} = 0 \text{ rad/s}}$$

Reconhecendo ao formulário, temos a seguinte fórmula para calcular a frequência de precessão:

$$(34) \quad \dot{\psi} = \frac{I_{\parallel}}{(I_{\perp} - I_{\parallel}) \cos \psi} \cdot \dot{\sigma}$$

Como visto anteriormente $\cos \psi \approx 1$. Para além disto, visto que o momento de inércia da estatura em relação ao seu eixo de simetria A-A é o dobro do momento de inércia em relação a qualquer eixo normal a A-A, temos $I_{\parallel} = 2 I_{\perp}$, logo, por (34):

$$\dot{\psi} = \frac{I_{\parallel}}{(I_{\perp} - I_{\parallel}) \underbrace{\cos \psi}_{\approx 1}} \cdot \dot{\sigma} = \frac{2 I_{\perp}}{-I_{\perp}} \cdot 0.388510291 \text{ rad/s} = -0.777020582 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{\psi} = -0.77702 \text{ rad/s}}$$

$$\therefore (\dot{\psi}, \dot{\psi}, \dot{\sigma}) = (-0.77702 \text{ rad/s}, 0, 0.38851 \text{ rad/s})$$

ii) O ângulo de nutação encontra-se representado na figura, i.e., é o ângulo entre o eixo Z com o de rotação A-A. O ângulo está representado a lanterna.

iii) A precessão é direta caso $\dot{\psi}$ e $\dot{\sigma}$ tenham o mesmo sinal, e retrógrada caso tenham sinais opostos. Como, neste caso, a precessão e a rotação própria têm sinais opostos ($\dot{\psi} < 0$, $\dot{\sigma} > 0$ pela alínea anterior) então podemos concluir que a precessão é retrógrada.

b) Para $\chi = 0.71$ temos: ângulo de nutação, $\psi = (2 + 0.710)^{\circ} = 2.710^{\circ}$

Para corpos assimétricos (como neste caso), pode-se alinhar o momento angular $\vec{H}_C$ com o eixo Z. Assim a velocidade angular é dada por:

$$\vec{\omega} = \vec{\psi} + \cancel{\vec{\sigma}} + \vec{\sigma} = \vec{\psi} + \vec{\sigma}$$

Como o ângulo de nutação já não é muito pequeno, temos de calcular a frequência de precessão através de (34) para o novo valor de ν :

$$\dot{\psi} = \frac{I_{\parallel}}{(I_{\perp} - I_{\parallel}) \cos \nu} \cdot \dot{\sigma} \quad \begin{array}{l} \text{maném-se o} \\ \text{valor da frequência} \end{array} = \frac{2 I_{\perp} \times 0.388510291 \text{ rad/s}}{-I_{\perp} \times \cos(2.710)} = -0.777890545 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \vec{\dot{\psi}} = -0.777890545 \vec{e}_2$$

Como $\vec{\sigma} = 0.38851 \vec{e}_{z_2}$ e como pretendemos somá-la a $\vec{\dot{\psi}}$, precisamos, primeiro, de decompor $\vec{e}_{z_2}$ em algo que nos permita colocá-la ambos sobre o mesmo referencial (x_2, y_2, z_2) :

$$\vec{e}_{z_2} = (\cos \nu) \vec{e}_{z_2} + (\sin \nu) \vec{e}_{y_2} \quad \begin{array}{l} \nu = 2.710^\circ \\ \uparrow \end{array} = \cos(2.710^\circ) \vec{e}_{z_2} + \sin(2.710^\circ) \vec{e}_{y_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } \vec{\dot{\psi}} &= -0.777890545 \vec{e}_{z_2} = -0.777890545 (\cos(2.710^\circ) \vec{e}_{z_2} + \sin(2.710^\circ) \vec{e}_{y_2}) = \\ &= -0.036779278 \vec{e}_{y_2} - 0.777020581 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

Podemos, assim, calcular finalmente o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$:

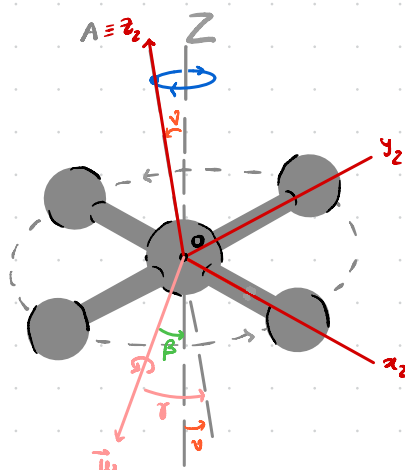
$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\dot{\psi}} + \vec{\sigma} = \dot{\psi} \sin \nu \vec{e}_{y_2} + (\dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma}) \vec{e}_{z_2} = \\ &= -0.036779278 \vec{e}_{y_2} - 0.777020581 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)} + 0.388510291 \vec{e}_{z_2} = \\ &= -0.036779278 \vec{e}_{y_2} - 0.38851029 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\omega} = -0.036779 \vec{e}_{y_2} - 0.38851 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)}}$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{(-0.036779278)^2 + (-0.38851029)^2} = 0.390247307 \text{ rad/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{|\vec{\omega}| = 0.39025 \text{ rad/s}}$$

No que toca ao ângulo que a velocidade angular faz com o eixo $\vec{z}$ temos:



Como visto nos aulas técnicas, estende $\vec{\omega}$ na plana y_2z_2 neste caso do corpo assimétrico, temos que a velocidade angular faz um determinado ângulo, γ , com o eixo de simetria do corpo, A-A, sendo que γ é dada pela seguinte expressão:

$$(35) \quad \tan \gamma = \frac{\omega_{y_2}}{\omega_{z_2}} = \frac{\dot{\psi} \sin \nu}{\dot{\psi} \cos \nu + \sigma}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arctan \left(\frac{\omega_y}{\omega_z} \right) = \arctan \left(\frac{-0.036779278 \text{ rad/s}}{-0.38851029 \text{ rad/s}} \right) = 0.094386158 \text{ rad} = 5.407928552^\circ$$

Além da figura podemos observar que o ângulo que o vetor velocidade angular faz com o eixo $\vec{z}$ é dado por:

$$(36) \quad \beta = \gamma - \nu$$

Substituindo os respectivos valores obtemos:

$$\beta = \gamma - \nu = 0.094386158 \text{ rad} - \frac{2.710 \times \pi}{180} \text{ rad} = 0.047087735 \text{ rad/s} = 2.697928458^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\beta = 0.047088 \text{ rad} = 2.6979^\circ}$$

c) O momento angular, $\vec{H}$, é dado por:

$$\vec{H} = \vec{I} \circ \vec{\omega} \Rightarrow \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Neste caso, o referencial em estudo é um referencial principal de inércia. Logo os produtos de inércia são zero e, consequentemente a relação em torno dos eixos de inércia está equilibrada.

Lembrando que a estação é assimétrica e que $I_{yy} = 2I_{zz} = I_{AA}$ temos:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{\perp} = \frac{I_{AA}}{2}$$

$$I_{zz} = I_{\parallel} = 2I_{\perp} = I_{AA}$$

Substituindo na matriz:

$$\vec{H}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{I_{AA}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H}_O = I_{AA} \begin{bmatrix} \omega_x/2 \\ \omega_y/2 \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_O = I_{AA} \left(\frac{\omega_{x_2}}{2}, \frac{\omega_{y_2}}{2}, \omega_{z_2} \right) \Rightarrow$$

$\downarrow$
 Com os eixos adequados
 ($x_2 y_2 z_2$)
 vetor

$$\Rightarrow \vec{H}_0 = I_{AA} \left(\frac{0}{2}, \frac{-0.036775278}{2}, -0.38851029 \right) = I_{AA} (0, -0.018387639, 0.38851029) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H}_0 = I_{AA} (0, -0.018390, -0.38851) \text{ (kg.m}^2/\text{s)}$$

Temos que, lembrando a):

$$\dot{\psi} = \frac{I_{\parallel}}{(I_{\perp} - I_{\parallel}) \cos \nu} \cdot \dot{\sigma} = \frac{2 I_{\perp}}{-I_{\perp} \cos \nu} \cdot \dot{\sigma} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{-2 \dot{\sigma}}{\cos \nu} \Rightarrow \dot{\sigma} = \frac{\dot{\psi} \cdot \cos \nu}{-2}$$

freq. precessão freq. rotação do corpo

Assim, como visto em b), temos $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\psi} + \vec{\sigma} = \dot{\psi} \sin \nu \vec{e}_{y_2} + (\dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma}) \vec{e}_{z_2} = \leftarrow \text{Substituindo } \dot{\sigma} \text{ pela expressão} \\ &= \dot{\psi} \sin \nu \vec{e}_{y_2} + \left(\dot{\psi} \cos \nu - \frac{\dot{\psi} \cos \nu}{2} \right) \vec{e}_{z_2} = \\ &= \dot{\psi} \left(\sin \nu \vec{e}_{y_2} + \frac{\cos \nu}{2} \vec{e}_{z_2} \right) \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

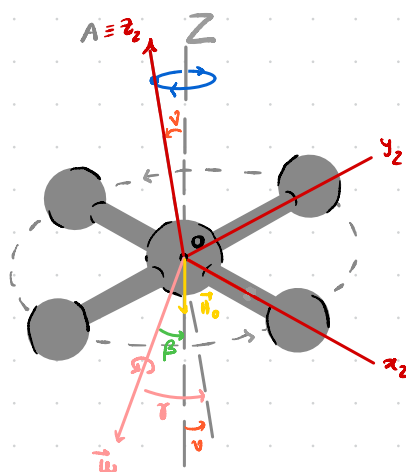
O momento angular, como visto, apenas tem componentes não nulas em $\vec{e}_{y_2}$ e $\vec{e}_{z_2}$, por isso, este pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \overbrace{H_y \vec{e}_{y_2} + H_z \vec{e}_{z_2}}^{\text{corpo livre}} = \frac{\omega_{y_2}}{2} \vec{e}_{y_2} + \omega_{z_2} \vec{e}_{z_2} = \\ &= \frac{\dot{\psi}}{2} \sin \nu \cdot \vec{e}_{y_2} + \frac{\dot{\psi} \cos \nu}{2} \cdot \vec{e}_{z_2} = \\ &= \frac{\dot{\psi}}{2} \left(\sin \nu \vec{e}_{y_2} + \cos \nu \vec{e}_{z_2} \right) \text{ (kg.m}^2/\text{s)} \end{aligned}$$

Como $\vec{e}_z = (\sin \nu) \vec{e}_{y_2} + (\cos \nu) \vec{e}_{z_2}$, então podemos modificar a expressão do momento angular da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \frac{\dot{\psi}}{2} \left(\sin \nu \vec{e}_{y_2} + \cos \nu \vec{e}_{z_2} \right) = \frac{\dot{\psi}}{2} \vec{e}_z = \frac{-0.777890545}{2} \vec{e}_z = -0.388945272 \vec{e}_z \text{ (kg.m}^2/\text{s)} \\ \Rightarrow \vec{H}_0 &= -0.38895 \vec{e}_z \text{ kg.m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte representação do momento angular na imagem (a amarela):



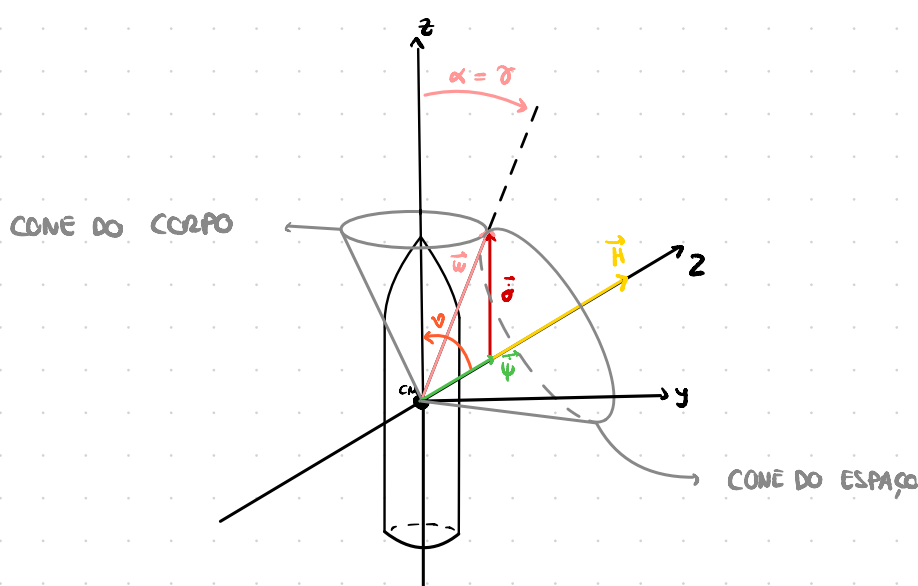
Para a variação do momento angular ao longo do tempo:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\underbrace{-0.38895}_{\text{constante}} \vec{e}_2) = -cte \times \frac{d\vec{e}_2}{dt} = 0$$

Assim concluímos que $\vec{H}_O$ não varia ao longo do tempo do ponto de vista do centro de massa.

4) Para $X = 0.710$ temos: $\alpha = (3 + 0.710)^\circ = 3.71^\circ$

a) O foguete é um corpo alongado, deste modo Ψ e σ têm o mesmo sinal (precessão direta). Como o foguete é assimétrico, então como visto anteriormente $\vec{\omega} = \vec{\sigma} + \vec{\Psi}$, $\dot{\nu} = 0$. Não fazendo a imagem é exata do mesmo ângulo α , para uma melhor observação.



b) Sendo $X = 0.710$ obtenhamos:

$$\dot{\sigma} = (1 + 0.710) = 1.710 \text{ rev/s} = 10.74424688 \text{ rad/s}$$

$$\text{razão dos momentos} = 8 + 4 \times 0.710 = 10.84 > 1!$$

principais de inércia

Como o foguete é um corpo alongado, então $I_\perp > I_\parallel$, logo a razão dos momentos de inércia é $\frac{I_\perp}{I_\parallel} = 10.84$ (da enunciado), isto pois o valor dado é superior a 1 e $\frac{I_\parallel}{I_\perp} < 1$.

i) Sendo o foguete um corpo livre assimétrico temos $\dot{\nu} = 0$, pois $\nu = \text{const.}$ Logo podemos obter o valor do ângulo de nutação, através de σ ao recorrermos à seguinte expressão da fórmula:

$$(36) \quad \tan \nu = \frac{I_\perp}{I_\parallel} \tan \sigma$$

$$\tan v = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \tan \sigma \Rightarrow v = \arctan \left(10.84 \times \tan(3.71^\circ) \right) = 0.612663749 \text{ rad} = 35.1030471^\circ$$

Deste modo, através destas velocidades e da geometria (34), temos o valor da precessão:

$$\dot{\psi} = \frac{I_{\parallel}}{(I_{\perp} - I_{\parallel}) \cos v} \cdot \dot{\sigma} = \frac{I_{\parallel} \times 10.74424688 \text{ rad/s}}{(10.84 - 1) I_{\parallel} \cdot \cos(0.612663749 \text{ rad})} = 1.334640592 \text{ rad/s}$$

$$= 76.46927304^\circ$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = 1.3346 \text{ rad/s} = 76.469^\circ$$

ii) Como calculado na alínea anterior: $v = 0.61266 \text{ rad} = 35.103^\circ$

iii) Para esta alínea temos que o momento angular no centro de massa é dado por:

$$\vec{H}_C = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Como visto, a velocidade angular $\vec{\omega}$ é dada por:

$$\vec{\omega} = \vec{\psi} + \vec{\sigma} = \dot{\psi} \vec{e}_2 + \dot{\sigma} \vec{e}_2$$

Como $\vec{e}_2 = (\sin v) \vec{e}_y + (\cos v) \vec{e}_z$ obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi} (\sin v \vec{e}_y + \cos v \vec{e}_z) + \dot{\sigma} \vec{e}_2 = \\ &= 1.334640592 (\sin(0.612663749 \text{ rad}) \vec{e}_y + \cos(0.612663749 \text{ rad}) \vec{e}_z) + 10.74424688 \vec{e}_2 = \\ &= 0.767483419 \vec{e}_y + 11.83614189 \vec{e}_z \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

Logo, podemos calcular $\vec{H}_C$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{H}_C &= I_{\perp} \omega_x \vec{e}_x + I_{\perp} \omega_y \vec{e}_y + I_{\parallel} \omega_z \vec{e}_z = \leftarrow \text{Como visto em cima } \omega_x = 0 \\ &= 10.84 I_{\parallel} \times \dot{\psi} \sin v \vec{e}_y + I_{\parallel} \times (\dot{\psi} \cos v + \dot{\sigma}) \vec{e}_z = \text{C.A.} \\ &= 10.84 I_{\parallel} \times \dot{\psi} \sin v \vec{e}_y + I_{\parallel} \times \dot{\psi} (\cos v + 9.84 \cos v) \vec{e}_z = \\ &= 10.84 \times I_{\parallel} \times \dot{\psi} (\sin v \vec{e}_y + \cos v \vec{e}_z) = \\ &= 10.84 \times 1.334640592 \text{ rad/s} \times I_{\parallel} \vec{e}_2 = \\ &= 14.46750402 \cdot I_{\parallel} \vec{e}_2 \text{ (kg m}^2/\text{s)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_C = 14.46750402 I_{\parallel} \vec{e}_2 \text{ (kg m}^2/\text{s)}$$

iv) A variação do vetor momento angular $\vec{H}$ em ordem ao tempo é dada por:

$$\frac{d \vec{H}_C}{dt} = \frac{d (14.46750402 \times I_{\parallel} \vec{e}_2)}{dt} = 14.46750402 \times I_{\parallel} \times \frac{d \vec{e}_2}{dt} = 0$$

v) Como calculado anteriormente, temos que $\dot{\psi} = 1.334640592 \text{ rad/s}$ e $\dot{\theta} = 10.74424688 \text{ rad/s}$, assim, como têm ambos o mesmo sinal podemos concluir que a precessão é direta.

5) A estabilidade de um corpo é difícil de ser estudada a partir das 2 equações de Euler, pois estas são difíceis de resolver para este caso.

Reescrevendo as equações da energia cinética de um corpo rígido:

$$E_c^{\text{rot}} = T = \frac{1}{2} (A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2)$$

Na forma das equações de um elipsóide, temos:

$$\frac{\omega_x^2}{2(I/A)} + \frac{\omega_y^2}{2(I/B)} + \frac{\omega_z^2}{2(I/C)} = 1$$

O elipsóide obtido é o elipsóide de Poinsot e significa que a extremidade do vetor velocidade angular está sempre sobre ele, de modo a verificar a equação.

Considerando o corpo livre de momentos ($\sum M_c = 0$), e realizando o produto interno de $\vec{H}_c$ com a equação de Euler, resulta que $H = \text{cte}$. Na referência principal de inércia:

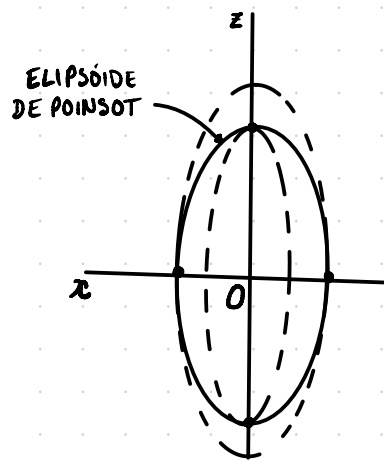
$$H^2 = A^2 \omega_x^2 + B^2 \omega_y^2 + C^2 \omega_z^2 (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_x^2}{(H/A)^2} + \frac{\omega_y^2}{(H/B)^2} + \frac{\omega_z^2}{(H/C)^2} = 1$$

Obtém-se o elipsóide do momento angular. A velocidade angular também tem de verificar esta equação do elipsóide.

Assim, de forma a verificar ambas as equações do elipsóide de Poinsot e do elipsóide do momento angular, a ponta do vetor velocidade angular tem de estar sobre a interseção dos dois elipsóides. Deste modo, (intersetando os dois elipsóides) obtemos as trajetórias possíveis para a velocidade angular e podemos estudar a estabilidade da rotação de um corpo.

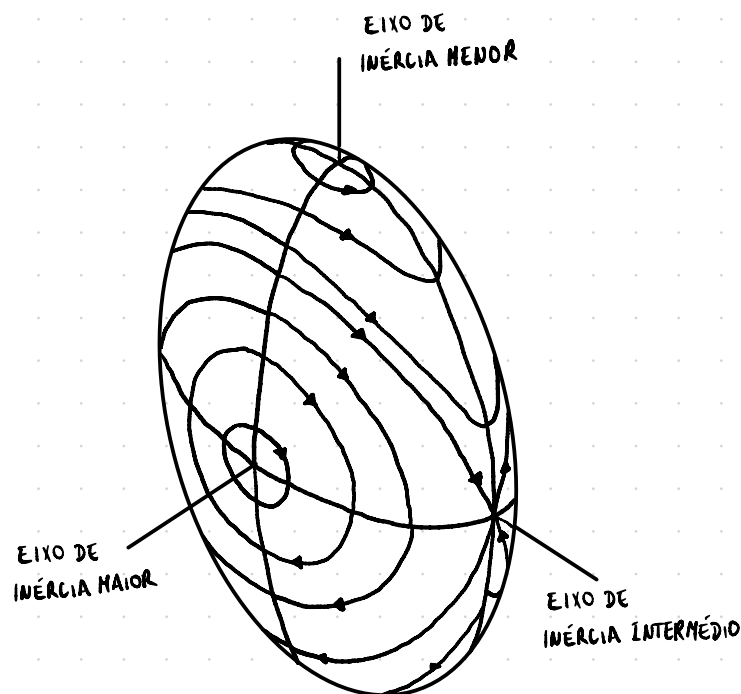
Analisando os semi-eixos dos elipsóides de Poinsot e do momento angular concluímos que o de Poinsot é mais arredondado e o do momento angular é mais afilado. Nos casos limite, o elipsóide do momento angular encontra-se completamente no interior ou no exterior do elipsóide de Poinsot. Consequentemente, iremos ter dois casos de interseção, um no maior semi-eixo dos elipsóides e outro no menor semi-eixo, correspondendo aos semi-eixos de um menor e maior momento de principal de inércia, respetivamente.



a) Um corpo livre que esteja a rodar em torno de um eixo principal de inércia, irá continuar a rodar em torno desse eixo, pois a inércia da rotação está equilibrada pela diminuição do eixo principal de inércia.

No entanto, para analisarmos o caso em que o eixo de rotação de um satélite está em torno do seu eixo principal de inércia, não coincidindo com o mesmo, é preciso analisar as linhas que descrevem as trajetórias possíveis para $\vec{\omega}$ nas imediações dos eixos.

Para os casos dos eixos principais de maior e menor inércia, respectivamente o menor e o maior semi-eixo da elipse que caracteriza o elipsóide, é possível concluir, por observação da imagem, que a trajetória circunda o ponto de equilíbrio, não se afastando desta posição, pelo que a rotação é estável. Para o eixo de inércia intermédio, podemos ver que um pequeno desvio do eixo de rotação colocará $\vec{\omega}$ numa trajetória que o afastará do eixo, levando o corpo a "fazer piruetas", pelo que a rotação é instável.

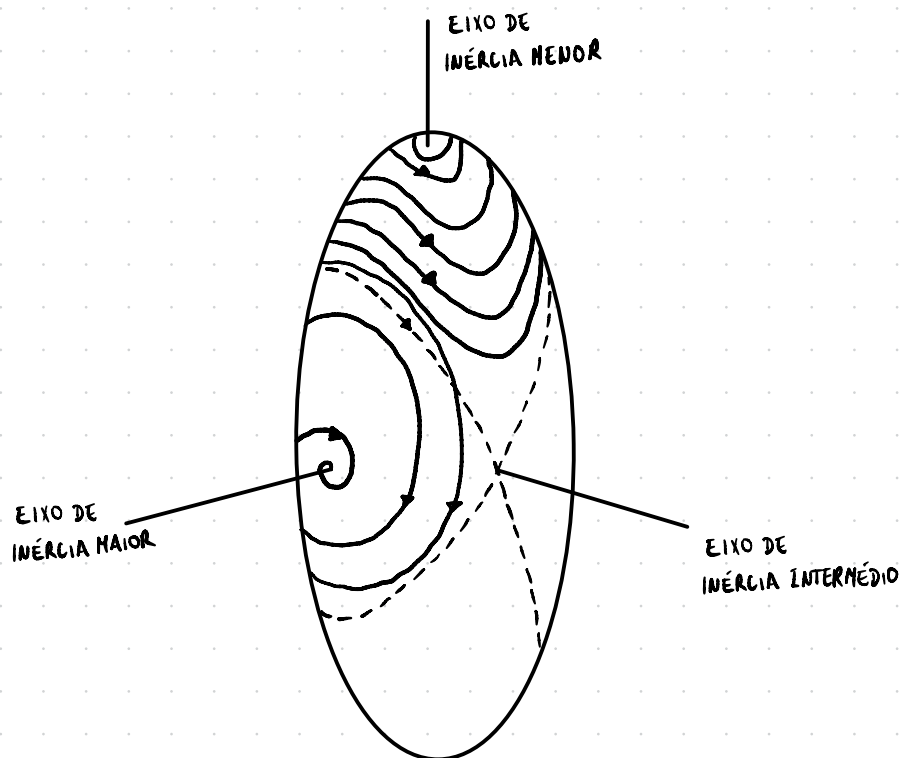


b) Neste tipo de exercícios é comum aproximar-se o satélite a um corpo rígido, contudo, os satélites são constituídos por elementos partes rígidas (ex.: antenas e painéis solares) que vibram com a rotação do corpo, provocando dissipação de energia cinética, uma vez que as vibrações não são completamente elásticas.

Como resultado, iremos ter uma diminuição dos semi-eixos do elipsóide de Poincaré ($\sqrt{\frac{2T}{I_i}}$) ao longo do tempo, pois estes dependem diretamente da energia. Esta diminuição acaba sempre no caso limite em que o elipsóide de Poincaré fica completamente no interior do elipsóide do momento angular, sendo que o ponto de contacto corresponde ao eixo de maior inércia.

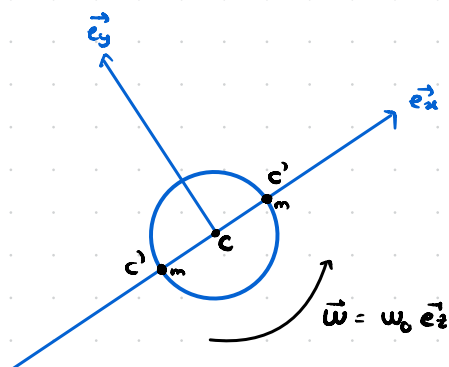
Deste modo, iremos ter uma variação das trajetórias possíveis de $\vec{\omega}$, pois a intensidade dos elipsóides irá variar. A velocidade angular acaba por passar por todos estes estados intermédios, sendo a sua trajetória resultante a representada na figura.

Por isto, e como é observável na imagem, quando há dissipação da E_c , o único eixo estável passa a ser o eixo de maior inércia, passando o eixo de menor de inércia a ser instável. Deste modo, os satélites devem ser estabilizados de forma a que o seu eixo de rotação seja coincidente com o eixo de máxima inércia, pois caso contrário irá ocorrer precessão e rotação, e o satélite acabará a rodar em torno de um eixo não desejado.



6

a) Assumindo os beams como massas pontuais não haverá qualquer tipo de massa na periferia da singularidade, o que implica $I_{C_1}^{beam} \approx 0$ onde C_1 é o ponto de massa pontual.



Pelo Teorema dos eixos paralelos, apresentado seguidamente, podemos obter o tensor de inércia do beam em C:

$$I_{zz, C}^{beam} = \cancel{I_{zz, C'}^{beam}} + m(x'^2 + y'^2) = m(x'^2 + y'^2)$$

Seja o momento angular $\vec{H}$ dado por $\vec{H} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ e sendo o momento angular do no centro de massa dado pela soma dos momentos angulares dos beams e do corpo centrado podemos obter $\vec{H}_C$:

$$\begin{aligned} \vec{H}_C &= \vec{H}_C(\text{corpo centrado}) + 2 \vec{H}_C(\text{beam}) = I_{ij} \cdot \vec{\omega} + 2 \cancel{I_C^{beam}} \cdot \vec{\omega}_{beam} = \\ &= (I_{zz} + 2 \cancel{I_{zz}^{beam}}) \omega_0 \vec{e}_z = (A + 2m(x^2 + y^2)) \omega_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

do enunciado

$$\Rightarrow \underline{\vec{H}_C = (A + 2m(x^2 + y^2)) \omega_0 \vec{e}_z}$$

b) Quando os massas se encontram à distância x arbitrária, sendo $b^2 = x^2 + y^2$, temos:

$$b^2 = x'^2 + \cancel{y'^2} = x'^2 \quad \rightarrow \text{referencial fixo em relação ao objeto}$$

Assim, temos que o momento angular é dado por:

$$\vec{H}_C' = (A + 2m x'^2) \omega' \vec{e}_z$$

Pela conservação do momento angular:

$$\vec{H}_C' = \vec{H}_C \Rightarrow \boxed{\omega' = \frac{A + 2m(x^2 + y^2)}{A + 2m x'^2} \cdot \omega_0}$$